高等学校教学用书

控制论引论

卢志恒

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

控 制 论 引 论

卢 志 恒

北 京 师 范 大 学 出 版 社

（京）新登字 160 号

图书在版编目（CIP）数据

控制论引论/卢志恒著．－北京：北京师范大学出版社，
1994.8
高等学校教学用书
ISBN 7－303－03315－7

Ⅰ．控…　Ⅱ．卢…　Ⅲ．控制论　Ⅳ．0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（94）第 11091 号

北京师范大学出版社出版发行
（100875　北京新街口外大街 19 号）
北京师范大学印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本：850×1168　1/32　印张：11.25　字数：274 千
1994 年 5 月北京第 1 版　　1994 年 8 月北京第 1 次印刷
印数：1－1 500 册
定价：8.40 元

内容简介

本书从状态空间和状态方程出发，将经典控制理论和现代控制理论有机地结合在一起，简要而系统地阐述了控制论的基本原理．全书共分六章：控制系统概论，反馈控制理论，最优控制理论，非线性系统，离散系统和随机系统．书中着重介绍基本概念和基本理论，并兼顾控制论在工程控制和管理科学中的典型应用．

本书结构简明，物理思想清晰，具有较好的可读性．可以作为理工科有关专业高年级学生和研究生的教材或参考书，也可作为具有高等数学基础的广大科技工作者、经济工作者和管理人员学习控制理论的自学书籍．

前　言

本书是在北京师范大学系统理论专业本科和管理专业研究生《控制论》课程多年讲义基础上写成的.它侧重于阐述现代控制理论的基本原理,对于经典的伺服控制原理作了较多的删节,但其最基本的内容仍然保留.一方面,这部分内容不是现代控制理论可以代替的;另一方面,它又能促进读者尽快建立起"自动控制"的概念.本书的特点之一是将经典控制理论在现代控制理论框架中,从状态方程出发演绎出来,从而使两者有机地结合成一个整体.

全书共分六章:控制系统概论;反馈控制理论;最优控制理论;非线性系统;离散系统和随机系统.书中适当借鉴理论物理建立体系的模式,注意阐述控制系统的泛动力学过程,同时又兼顾控制理论在工程控制、社会经济和生命过程的典型应用.在文字叙述上,注意到可读性.对于较专门的数学知识,书中作了补充.

面对着具有良好的数学物理学基础而又甚至缺乏自动控制基本常识的学生,如何开设一门控制理论课程是一项探索性的工作.作者在成书过程中得到了同事们和学生们的鼓励和帮助,借此谨表谢意.

作　者

1991年冬于北京

目　　录

绪　　论

控制论，就其本来的意义，是为解决自动控制的工程设计的数学问题发展起来的.因此它和自动控制技术的发展紧密相关.

早期的控制技术大多应用反馈机制解决定值调节或者自动跟踪一类问题，比如：动力机械的转速控制，热力化工系统的温度、压力控制，船舶与飞机的导航，火炮与雷达的跟踪和控制等等.机电仪表是实现这类控制的主要技术手段.自上世纪离心调速器在蒸汽机中的应用开始至第二次世界大战期间，控制技术有了不小进步.不过从理论上看，还只能解决一些比较简单的问题.这一时期发展起来的控制理论不对控制系统的内部状态作具体的研究，而只从控制系统的外部联系上去把握系统的行为.系统的描写采用所谓"黑箱模型".这样的理论体系被后人称为"经典控制论".

由于电子管、晶体管和电子计算技术的发明和发展，特别是在航天事业的推动下，需要研究解决的和能够研究解决的自动控制问题越来越复杂，于是出现了最优控制理论、随机控制理论、非线性系统控制理论和自适应控制理论等等.这一时期发展起来的这些理论统称为"现代控制论"，它以引入状态变量和状态空间来描写控制系统为标志.

早在本世纪40年代，人们就认识到：控制理论不仅能够解决自动控制的工程设计问题，而且还可以用来描写生命过程和经济发展这类"信息的传递"起着重要作用的领域.尽管这一时期物理科学的发展非常瞩目，不仅成功地解决了自身研究领域中的各类基本问题，并且，由于广泛的推广应用，建立起从宇观、宏观到微观的各种各样的边缘学科，诸如天体物理学、地球物理学、生物物理

学和量子化学理论等等，同时还不断地派生出新的工程技术分支．但是，控制论所建立起来的信息传递与控制理论并没有被物理学轻易地“统一”起来．维纳（N. Wiener）所出版的著名著作《控制论》（“Cybernetics”）着重论述了控制理论的基本特征．这些特征是区别于其它学科，特别是区别于物理学的．这本书主要论及了控制论在理论体系上的独立性．

事实上，长期以来控制论只是被当成一门技术理论或者应用数学，很少探讨它和其他科学，特别是物理学之间的联系．实际的情况是：一方面控制理论在不断借鉴物理学的概念和方法的过程中得到了发展．例如最优控制理论首先是借鉴了分析力学中的拉格朗日——哈密顿理论，然后才走上自身发展的道路．再如现代控制论中的状态变量和状态空间的概念正是统计物理中状态变量和相空间概念的合理推广．人们都把维纳作为控制论的奠基人，但很少有人提起，正是经典电磁场理论的创始人麦克斯韦（J. Maxwell）引入了反馈的概念成功地阐明了蒸汽机调速器的数学理论，从而开创了经典控制理论．另一方面，近代物理学的发展也从控制理论中吸取了养分，例如近代光学的重要分支——《信息光学》，正是物理学家和控制理论工作者在本世纪60年代合作创立的，近代非平衡态统计物理的一些非常活跃的分支，如耗散结构和协同学等也从控制理论中吸收了重要思想，产生了诸如“时间之矢”的概念、伺服原理、绝热消去法以及线性响应理论等等．在研究脑科学、人工智能、生命过程以及社会经济这些当代科学的重大课题时，物理学家、控制论学者和其他学科的科学工作者又“默默地”工作在一起．从自然哲学角度来看，《控制论》和《物理学》这两门学科既互相排斥又互相联系．它们的相消相长、相反相成正在交织出当代科学的交叉发展过程中的一幅辩证图景．

本书试图在这样一种学科交叉发展的背景下引导读者掌握控制理论的最基本的内容．

第一章　控制系统概论

本章着重介绍描述控制系统的数学方法.从建立状态方程出发推导出传递函数，把经典控制理论和现代控制理论统一起来.简要回顾了矩阵运算和拉普拉斯变换.并应用这些数学方法对线性系统状态方程的一般解法作了研究.最后讨论了系统的可控制性和可观测性.

§1　控制系统

一、基本概念

控制系统是人类的一种有意图的操作对象.控制论着眼于研究某种有意图的作用对控制系统的行为造成的影响.例如我们要控制一个化学反应器的温度，就要在仪表上设定温度信号，研究实际温度对设定信号的响应过程；如果我们要制导一个飞船，就要研究在无线电发送的信号制导下飞船的行为；一个教师在课堂上讲课，要研究学生接受了多少，考试成绩怎样；一个政府部门推行某项政策，要研究政策的社会效果，等等.在这里，化学反应器、宇宙飞船、教学班、社会都被看作控制系统.一方面它接受控制信号，如温度设定值、制导讯号、授课和政策等等，称为系统的**输入量**，简称**输入**；另一方面它又对这些控制信息作出反应，如反应器的实际温度值，飞船的空间方位和飞行方向，教学效果和政策的社会效果等等，称为**输出量**，简称**输出**，有时也把输出量称为响应.

不同的控制系统，输入量及输出量的数目是不同的.反应器的温度控制，只有一个输入量和一个输出量；飞船的飞行行为，如果

不考虑转动，有三个平动自由度，输出至少有三个．教学活动和社会活动，情形要复杂一些．具有一个输入量和一个输出量的系统称为**单输入单输出系统**，这种系统是经典控制理论长期以来的研究对象．

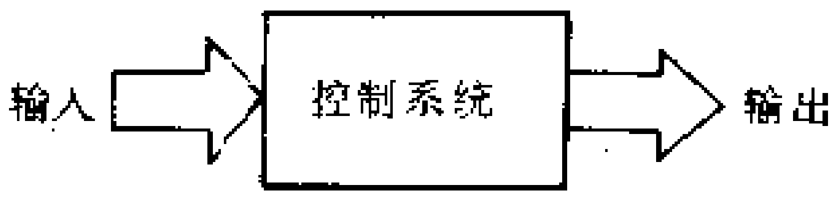


图 1-1　控制系统

控制对象的实际过程常常要比控制参数所反映的复杂得多．比如化学反应器，不只是有温度的变化，而且内部进行着复杂的化学反应．飞船行进过程不只是向目标的飞行，还有发动机的燃烧，载荷内部的运动和变化等等；教学过程和社会活动是人的行为，更加复杂．为了实现某种控制，我们不可能也不必要事先全面地详尽地掌握系统的行为，而只是需要建立同控制目的相关的数学物理模型来表示．如果这个模型在数学上可用线性方程来表示．就称为**线性系统**，否则就称为**非线性系统**．

已经说过，控制对象的实际过程常常是很复杂的．如一个化学反应器，当要研究温度控制时，我们把它当作温度控制系统．实际发生的过程还有压力、流量、产额的变化等等．我们也可以把它当作压力控制系统，化学反应的最优产额控制系统等等．控制目的不同，输入输出变量不同，数学模型也不同，这就是我们提出注意的控制系统在概念上的相对性．

一个控制系统，特别是工程控制系统内部发生的过程常常是物理过程．如果施加于系统的输入量和系统作用于外界的输出量都是它们本身意义下的物理量（不是代表其他量的信息），那么整个控制过程也可能就是一种纯粹的物理过程．这类系统既可看作控制系统也可看作物理系统，控制系统和物理系统在含义上容许存在这种交迭，使得一些纯粹物理过程可以当作探讨控制理论的例子，特别是使已经成熟的物理学的理论框架可以作为控制理论

发展过程中的一种借鉴.

二、系统的描写

经典的伺服理论通常只研究系统的输出和输入的相互关系，并不涉及系统内部的状态. 这种数学模型把系统内部看成一个人们并不了解的黑箱，称为**黑箱模型**，如图 1-2.



图 1-2　黑箱模型

对于比较复杂的系统，输入和输出常常通过系统内部的某些特征量相互联系. 能够完整描写系统内部状态的独立变量称为**状态变量**. 状态变量的选择不是唯一的，可以通过一定的关系互相转换.

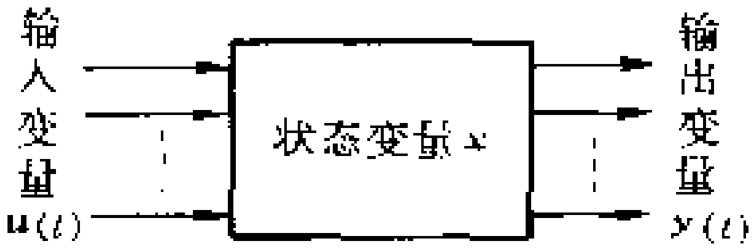


图 1-3　系统的状态

图 1-3 表示一个多输入多输出系统. 在此图上，输入端(左端)表示输入变量的集合，输出端(右端)表示输出变量的集合，状态变量的集合包含在系统的内部，一般通过输出变量作用于系统的外部，把这些变量的集合用向量来表示时，数学的处理将比较方便. 设输入变量、输出变量和状态变量的集合中，各自的变量数分别为 l、m、n. 则输入变量的集合可用输入向量 $\boldsymbol{u}$ 表示(小写黑体字母表示向量，下同)：

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

输出变量的集合可用输出向量 $\boldsymbol{y}$ 表示：

$$
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{1.2}
$$

状态变量的集合可用状态向量 $\boldsymbol{x}$ 表示：

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.3}
$$

这些变量一般随时间而变化．所以 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{x}$ 是时间的函数．在所有时刻 t 中，输入向量 $\boldsymbol{u}$ 的一切可能取值的集合构成了输入向量空间．同样，在所有时刻 t 中，输出向量 $\boldsymbol{y}$ 和状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的一切可能取值的集合构成了输出向量空间和状态向量空间．

§2 状态方程

控制的状态方程可以参照物理过程的状态方程来建立．为此先介绍力学系统的状态方程．

一、力学系统的状态方程

对于最简单的力学系统——质点，通常用坐标 x 和动量 p 来描写系统的状态．由于动量的定义为

$$
p = m\dot{x} \tag{2.1}
$$

质点运动所满足动力学方程为

$$
m\ddot{x} = f(x, t) \tag{2.2}
$$

根据式(2.1)和(2.2)描写质点运动的状态变量 x 和 p 应满足方程组：

$$\begin{cases} \dot{x} = p/m \\ \dot{p} = f(x,t) \end{cases} \tag{2.3}$$

对于一般的力学系统，假定还受有某种约束，只要系统所受的作用力是有势的，就可以写出相应的哈密顿函数 $\boldsymbol{H}(p,q,t)$. 这时描写系统的状态变量为广义坐标 q_i 和广义动量 p_i，它们满足哈密顿正则方程：

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial q_i} \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.4}$$

这是有势力场中的力学系统的状态方程.

由于哈密顿理论对经典物理学各分支都能适用，因此，式(2.4)也适合于电磁学、热力学等领域.

在最一般意义下，系统所受的力不一定是有势力. 这样的系统可以引入广义动能 $\boldsymbol{T}(p,q,t)$ 和广义力 $\boldsymbol{Q}_i(p,t)$ 对应于式(2.4)应为：

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial q_i} + \boldsymbol{Q}_i \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.5}$$

二、控制系统的状态方程

赫兹的工作表明，形如式(2.4)的正则方程，作某种变换，可使广义坐标变为广义动量，而原来的广义动量则处于广义坐标的位置，因此就最一般意义而言，描写系统状态的两种变量，即广义坐标和广义动量之间没有严格的区分. 在控制理论中用同一个符号 x_i 来表示.

为了兼容最一般力学系统，控制理论将状态方程写成如下形

式：

$$\dot{x}_i = f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.6}$$

来表示. 式中 $\boldsymbol{x}$ 表示所有状态变量的集合 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 这是一个向量. $\boldsymbol{u}$ 为外界对系统的作用的集合 $(u_1,u_2,\cdots u_n)$. 对广义力学系统而言，这是广义力. 对于控制系统，这是控制变量或称输入变量. $\boldsymbol{u}$ 也是向量.

式(2.6)给出了描述控制系统状态方程的理论框架. 显然，不管是方程(2.5)的第一式的广义坐标方程还是第二式的广义动量方程都能和它相容. 更简单的方程(2.3)和(2.4)自然也与它符合.

根据§1中输入向量、输出向量和状态向量的定义，即式(1.1)—(1.3)，由 n 个方程构成的方程组式(2.6)可写成向量形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{2.7}$$

上式就是通常意义下的控制系统的**状态方程**. 每个具体的控制系统，上式右边有相应的具体的函数形式.

系统的状态变量决定于系统的内部过程. 这些变量不一定直接作用于外界而能够被观测. 为了实现某种控制意图，有时也一定需要直接观测这些量. 一般地说控制系统的输出(被观测量)和状态变量有某种函数关系，写作

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{2.8}$$

为一般起见，$\boldsymbol{g}$ 也包含控制变量 $\boldsymbol{u}$.

将式(2.7)和(2.8)联立在一起，并用大写字母表示右边的向量函数关系，有

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) & (2.9) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) & (2.10) \end{cases}$$

式(2.9)称为控制系统的状态方程，式(2.10)称为输出方程. 两者联合起来称为系统的控制方程组.

三、线性控制系统的状态方程

如果式(2.9)和(2.10)右边可以表示为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的线性函数，即

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) & (2.11) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) & (2.12) \end{cases}$$

则由这样的方程所描写的控制系统称为线性系统，方程中 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$ 分别为 n,l,m 维向量；$\boldsymbol{A}(t)$ 称为 $(n\times n)$ **系统矩阵**（系数矩阵），$\boldsymbol{B}(t)$ 称为 $(n\times l)$ **控制矩阵**（驱动矩阵），$\boldsymbol{C}(t)$ 称为 $(m\times n)$ **输出矩阵**．$\boldsymbol{D}(t)$ 称为 $(m\times l)$ **传递矩阵**.

一般地说，系统矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$，$\boldsymbol{D}(t)$ 是时间的函数．这样的线性系统称为**线性时变系统**

显示了状态空间法的一般性. 下面举例说明.

〔例题 1〕试求出用三阶微分方程

$$a\dddot{x}(t)+b\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)=u(t)$$

表示的系统的状态方程.

〔解〕首先选择状态变量 $x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$为

$$x_1(t)=x(t)$$

$$x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\dot{x}(t)$$

$$x_3(t)=\dot{x}_2(t)=\ddot{x}(t)$$

代入了这样的状态变量后可将原来的方程改写成

$$a\dot{x}_3(t)+bx_3(t)+cx_2(t)+dx_1(t)=u(t)$$

经过整理，可变成下面的样子：

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t)=-\frac{d}{a}x_1(t)-\frac{c}{a}x_2(t)-\frac{b}{a}x_3(t)+\frac{u(t)}{a}$$

把上面的三个式子用向量的形式表示时，就成为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{d}{a} & -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{a}\end{bmatrix}u(t)$$

这就是说，状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}u(t)$$

式中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{d}{a} & -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{a}\end{bmatrix}$$

〔例 2〕试求出图 2-1 所示 LRC 串联电路的状态方程和输出方

程.

〔解〕电路的电流和电压间有下面的关系式

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t=ei(t)$$

现在把这个电气回路当作一个系统来研究.令输入变量为 $e_i(t)$,输出变量为 $e_c(t)$.并选择状态变量为 $q(t)=\int i(t)\mathrm{d}t$ 和 $i(t)$.采用以前的符号:输入变量 $u(t)$、输出变量 $y(t)$ 以及状态变量分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$,即

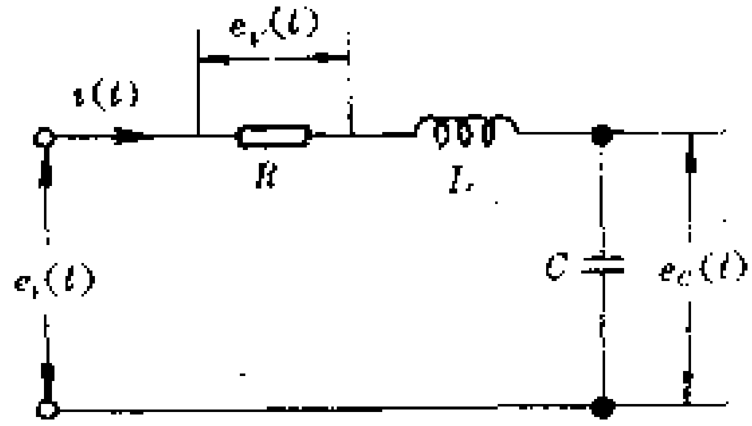


图 2-1　LRC 串联回路

$$u(t)=e_i(t)$$

$$y(t)=e_c(t)$$

$$x_1(t)=q(t)=\int i(t)\mathrm{d}t$$

$$x_2(t)=\dot{q}(t)=i(t)$$

可得到下面的式子

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=-\frac{1}{LC}x_1(t)-\frac{R}{L}x_2(t)+\frac{1}{L}u(t)$$

$$y(t)=\frac{1}{C}x_1(t)$$

用向量来表示这些关系时,有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

系统的状态方程和输出方程分别用下面二式表示

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

式中

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

如果把 R 两端的电压 $e_r(t)$ 也当作输出来研究时，令

$$y_1(t) = e_r(t)$$

$$y_2(t) = e_c(t)$$

输出方程就可表示为下面的向量形式

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

在前面的讨论中，为了便于理解，我们根据力学上状态方程形式，提出了控制系统状态方程应具有的基本形式.这只是问题的一个方面.因为控制系统毕竟不是(至少不完全是)物理系统，控制系统的状态方程在含义上可以和物理上十分不同，比如我们不能要求控制系统的状态变量象经典力学系统那样由坐标和动量两者成对地描写.特别是由于控制系统的确定与控制目的有着十分紧密的联系，同一过程，根据不同的控制目的，所要选择的控制变量、输出变量和状态变量可以十分不同.一些因素，只要在所讨论的场合下，不起重要作用，就可能被略去，这也是前一节曾经强调过的控

制系统在概念上的相对性.

简言之,我们依据经典力学系统的状态方程,提出了控制系统的状态方程,但是我们又不能把控制系统的状态方程局限于经典力学的含义上.

§3 矩阵运算

如前所述,控制系统的状态方程是一阶向量微分方程. 为了便于理解正文,下面简要回顾矩阵的基本知识.

一、矩阵的种类

矩阵是由 m 行 n 列排列而成的长方形阵. 一般用大写黑体字来表示. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可写成

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

a_{ik}是矩阵的元素. 有时也把这个矩阵简写成$[a_{ik}]$或 $A=[a_{ik}]$. m 行 n 列构成的矩阵叫$(m\times n)$矩阵. 特别在 $m=n$ 时,称为方阵. 而 n 是方阵的维数. $(m\times 1)$矩阵叫做 m 维列矩阵,或 m 维(列)向量. 常用下式所示的小写黑体字表示.

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

此外,$(1\times n)$矩阵称为 n 维行矩阵,或 n 维行向量. 列向量可简单地称为向量,向量的元素则叫做分量.

仅由元素 a_{ii}构成的方阵叫对角矩阵. 对角矩阵的对角线以外的元素全部为零. 对角线上的元素都等于 1 的对角矩阵称为单位

矩阵，用符号 $\boldsymbol{I}$ 表示.

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

元素全为零的矩阵叫零矩阵，用 0 表示. 把 $(m\times n)$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和列互换后构成的 $(n\times m)$ 矩阵叫做 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 用 $\boldsymbol{A}^T$ 表示. 如果 $\boldsymbol{a}$ 是 n 维列向量，则 $\boldsymbol{a}^T$ 就是 n 维行向量.

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$ 的矩阵叫对称矩阵. 换句话说，(i,k) 元素和 (k,i) 元素相等，也就是 $a_{ik}=a_{ki}(i,k=1,2,\cdots,n)$ 的方阵称为对称矩阵. $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^T$ 的矩阵叫反对称矩阵. 它是 $a_{ik}=-a_{ki}(i,k=1,2,\cdots,n)$ 的方阵. 其对角线元素全部为零.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，只有在它们的行数和列数分别相等，对应的元素也分别相等时，称 A 和 B 是相等的，写成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

二、矩阵的运算

1. 矩阵的相加和相减 对两个 $(m\times n)$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ik}]$ 和 $\boldsymbol{B}=[b_{ik}]$，则 $\boldsymbol{C}=[a_{ik}\pm b_{ik}]$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和或差，可写成

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}$$

m 不一定要等于 n. 但矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 如果不是同样的 $(m\times n)$ 矩阵，则相加和相减就没有意义.

从矩阵和的定义很容易知道下列各式是成立的：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\text{（和的交换法则）} \tag{3.4}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\text{（和的结合法则）} \tag{3.5}$$

对于零矩阵，下面的关系是显然的：

$$\boldsymbol{A}+0=0+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \tag{3.6}$$

2. 矩阵和标量的乘积 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都增加 a 倍而得的矩阵，称为 a 和 $\boldsymbol{A}$ 的标量积，写成 $a\boldsymbol{A}$.

显然，下面的关系是成立的.

$$(a+b)\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{A} \tag{3.7}$$

$$(ab)\boldsymbol{A}=a(b\boldsymbol{A}) \tag{3.8}$$

$$a(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=a\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B} \tag{3.9}$$

3. 矩阵和矩阵的乘积　$(m\times n)$矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和$(n\times l)$矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{C}$ 是$(m\times l)$矩阵，它的元素 c_{ik} 可表示为

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk} \tag{3.10}$$

或写成

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right] \tag{3.11}$$

〔例 1〕

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+2 & -1+4 & 2+0\\0+4 & -3+8 & 6+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

关于矩阵的积 $\boldsymbol{AB}$，应特别注意的是：仅当 $\boldsymbol{A}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，$\boldsymbol{AB}$ 才有定义. 并且，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的积 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的积 $\boldsymbol{BA}$ 一般是不相等的. 此外，$\boldsymbol{AB}=0$ 不一定意味着 $\boldsymbol{A}=0$ 或 $\boldsymbol{B}=0$. $\boldsymbol{A}\neq 0$，$\boldsymbol{B}\neq 0$ 而 $\boldsymbol{AB}=0$ 时，称 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为零因子. 特别当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

〔例 2〕

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 2\end{bmatrix}\neq \boldsymbol{AB}$$

〔例 3〕

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

关于矩阵的积有下面几个公式.

$$A(BC)=(AB)C \qquad \text{(积的结合法则)} \tag{3.12}$$

$$\left.\begin{aligned} A(B+C)&=AB+AC \\ (A+B)C&=AC+BC \end{aligned}\right\} \qquad \text{(积的分配法则)} \tag{3.13}$$

$$(AB)^T=B^TA^T \qquad \text{(积的转置)} \tag{3.14}$$

$$IA=AI=A \qquad \text{(和单位矩阵的乘积)} \tag{3.15}$$

4. **矩阵的微积分** 把矩阵、矩阵的和与矩阵的积对标量来微分时,可按普通的微分概念进行类推. 例如,$(m\times n)$矩阵 $A(t)$,如它的元素 $a_{ik}(t)$对标量 t 是可微分的,则 $A(t)$对 t 的微分可定义如下:

$$\dot{A}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)=\left[\frac{\mathrm{d}a_{ik}(t)}{\mathrm{d}t}\right] \tag{3.16}$$

由此,显然有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(t)+B(t)]=\dot{A}(t)+\dot{B}(t) \tag{3.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(t)B(t)]=\dot{A}(t)B(t)+A(t)\dot{B}(t) \tag{3.18}$$

相应地,矩阵的积分定义为矩阵每个元素的积分:

$$\int A(t)\mathrm{d}t=\left[\int a_{ik}(t)\mathrm{d}t\right] \tag{3.19}$$

5. **矩阵的分块** 用几根纵线和横线来分割矩阵 A,被分割出来的每一块因为其元素也排成一个长方形,所以也可看作为一个矩阵. 把这种分割出来的矩阵叫做 A 的子矩阵. 例如,(3×3)矩阵 A 按下面的方法分割时,可写成由子矩阵 A_1,A_2,A_3,A_4 所构成的(2×2)矩阵.

$$A=\left[\begin{array}{c:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

同样,分割(3×3)矩阵 B,可做成一个(2×2)矩阵.

$$B=\left[\begin{array}{c:cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hdashline b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix}$$

用子矩阵可将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和或积表示成下列形式

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_4 \\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix}$$

但是，这种分割应使上面两式右边的和以及积的运算有意义.

三、行列式和逆矩阵

1. 行列式 $(n\times n)$矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式可写成

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.20}$$

这称为 n 阶行列式. 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 可这样来计算：每次从行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的各行和各列中仅选出一元素而作出 n 个元素的乘积，所有可能的这种 n 个元素乘积的代数和就是 $|\boldsymbol{A}|$，而每项乘积前面是正号或负号，则根据下面的规则来决定：把所选出的 n 个元素从第 1 行的元素开始，顺序地排第 2 行，第 3 行，…，第 n 行的元素. 例如 $a_{13},a_{22},a_{21},\cdots a_{ni}$. 接着注意各元素所在列的数字. 如果小的数字前面是比它大的数字，就说有一个逆序. 当 n 个元素乘积的逆序数是偶数时，就在这个乘积的前面加正号. 反之，是奇数时就加负号. 例如，a_{13}、a_{22}、a_{21}列的数字分别为 3、2、1，这样，2 的前面是 3，1 的前面是 3 和 2. 于是逆序数为 3. 所以这个积的前面应加负号.

〔例 4〕计算行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

〔解〕从$|A|$的各行各列中仅选出 1 个元素，作出所有可能的 3 个元素的乘积及其符号如下：

积	逆序数	符号
$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$	0	+
$a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$	1	−
$a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$	1	−
$a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$	2	+
$a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$	2	+
$a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$	3	−

于是，$|A|$可计算如下：

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

n 阶行列式要有 $n!$ 个乘积组. 当 $n=2, n=3$ 时的简便计算方法是大家熟悉的.

行列式的下面一些性质，这是从行列式的定义导出来的. 它们不仅作为行列式的性质有重要意义，而且在实际计算行列式时也很有用.

(1)行和列互换，行列式的值不变.

(2)任意两行(或列)互换，行列式的值仅变号.

(3)两行(或列)相等的行列式等于零.

(4)行列式中某一行(或列)的各元素增加 a 倍，行列式的值也增加 a 倍.

(5)行列式中的某一行(或列)的各元素如是两个数的和，则此行列式可表示为两个行列式之和. 这两个行列式是这样构成的：把

原来行列式中各元素是两数之和的那行(或列)拆开，分别写在这两个行列式中的相同行(或列)中，而其它行(或列)不变.

(6)行列式中的某一行(或列)乘上 a 再加到其它行(或列)上，行列式的值不变.

2. **子行列式和余因子** 把 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 第 i 行和第 k 列去掉后得到的 $(n-1)$ 阶行列式用 M_{ik} 来表示，M_{ik} 叫做元素 a_{ik} 的子行列式或 $|\boldsymbol{A}|$ 的 $(n-1)$ 阶子行列式. 例如，三阶行列式为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则元素 a_{12} 的子行列式为

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

在 $|\boldsymbol{A}|$ 的子行列式中，它的对角线元素仍是 $|\boldsymbol{A}|$ 的对角线元素的子行列式，叫做 $|\boldsymbol{A}|$ 的主子行列式.

对于 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$，元素 a_{ik} 的子行列式写成 M_{ik} 时，则下式所示的 A_{ik}

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \tag{3.21}$$

叫做 a_{ik} 的余因子(代数余子式). n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 可用余因子展开如下：

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (\text{行展开}) \tag{3.22}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (\text{列展开}) \tag{3.23}$$

式(3.22)中的 i 或式(3.23)中的 k 可分别取 1 到 n 之间的任意数. 把行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 按式(3.22)展开称为对第 i 行展开，而把按式(3.23)展开称为对第 k 列展开.

从行列式的性质(3)可知，$i \neq k$ 时，有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0 \qquad (3.24)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{jk} = 0 \qquad (3.25)$$

用克隆内克符号(kronecker delta)δ_{ik}*可将式(3.22)和式(3.23)表示如下:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik}|\boldsymbol{A}| \qquad (3.26)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{jk} = \delta_{ik}|\boldsymbol{A}| \qquad (3.27)$$

3. **伴随矩阵和逆矩阵** 若矩阵 $\boldsymbol{B}=[b_{ik}]$的元素和余因子 A_{ik}的关系为 $b_{ik}=A_{ki}$. 则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,记作

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

显然,

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^* = [A_{ik}]^T \qquad (3.28)$$

把式(3.26)或式(3.27)所表示的关系式用伴随矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 来表示,可得到下面的等式

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} \qquad (3.29)$$

当 $\boldsymbol{A}\neq0$,把式(3.29)两边用$|\boldsymbol{A}|$来除时,就得到下式

$$\boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|} = \boldsymbol{I} \qquad (3.30)$$

对于给定的矩阵 A,如存在满足下面关系

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I} \qquad (3.31)$$

---

* $\delta_{ik}=\begin{cases}1 & i=k \\ 0 & i\neq k\end{cases}$

的矩阵 $\boldsymbol{X}$，则矩阵 $\boldsymbol{X}$ 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，写成 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 也就是有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \tag{3.32}$$

从式(3.30)可得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|} \qquad (|\boldsymbol{A}| \neq 0)$$

由于式(3.28)，上式也可写成

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{[A_{ij}]^T}{|\boldsymbol{A}|} \tag{3.33}$$

$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 乃是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵存在的必要和充分条件. 这种有逆矩阵的矩阵称为非奇异矩阵. 事实上，读者可以直接从式(3.26)导出式(3.33).

对于逆矩阵有下面的关系式：

$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$ 是相同维数的非奇异矩阵时，有

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{3.34}$$

A 是非奇异矩阵时

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1} \tag{3.35}$$

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A} \tag{3.36}$$

$$(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T \tag{3.37}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵，且对 t 可微分，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}^{-1}(t)] = -\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{A}}(t)\boldsymbol{A}^{-1}(t) \tag{3.38}$$

四、矩阵的特征值和特征方程

到现在为止，我们仅就实数进行了讨论，今后，如不特别预先声明，所讨论的数假定是复数. 对方阵 $\boldsymbol{A}$，如存在满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{3.39}$$

的数 λ 和不为 0 的向量 $\boldsymbol{x}$ 时，把 λ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，而 $\boldsymbol{x}$ 称为属于特征 λ 的特征向量. $\boldsymbol{x}$ 如是特征向量，c 是任意的数，则 $c\boldsymbol{x}$ 还是特征向量.

显然,式(3.39)可以写成

$$(A-\lambda I)x=0 \tag{3.40}$$

满足上式的不为0的向量x,其存在的必要充分条件为:

$$|A-\lambda I|=0 \tag{3.41}$$

如果矩阵A的维数为n,则根据行列式的定义,式(3.41)是λ的n次代数方程式.它具有n个根(r重根算作r个根).因为这些根是A的特征值,所以A的特征值的数目当然等于A的维数.

式(3.41)叫做A的特征方程式,而它的左边则叫A的特征多项式.

〔例5〕试求出方阵$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$的特征方程式、特征值和各特征值的特征向量.

〔解〕 A的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$$

因此它的特征值是i和$-i$.为了求得i的特征向量,根据式(3.39)可得

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=i\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

也就是解出下式即可

$$x_2=ix_1$$

$$-x_1=ix_2$$

因为把第一式乘上i后就得到第二式,所以仅注意第一式即可.令$x_1=c$,则$x_2=ic$.因而,属于i的特征向量是$c\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$,$c$是任意数.同样,属于$-i$的特征向量是$d\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$,$d$是任意数.

下面再列出几个与本节有关的定理.

(1)A的特征值和A^T的特征值是一样的.

(2)A 是实对称矩阵时，其特征值全部是实数.

(3)如 P 是 n 维非奇异矩阵，则 $P^{-1}AP$ 的特征值和 A 的特征值一样.

五、二次型

n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$Q=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \quad (3.42)$$

上式称为二次型，a_{ik}是二次型的系数，并设 $a_{ik}=a_{ki}$. 可将二次型简写成

$$Q=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k \quad (3.43)$$

上式可用对称矩阵 $A=[a_{ik}]$和 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 表示如下：

$$Q=\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \quad (3.44)$$

当式(3.43)用式(3.44)那样的矩阵符号表示时，二次型的研究就非常容易.

二次型在研究控制系统的稳定性和最优控制理论时常被用到. 我们来简单研究一下二次型的性质.

首先，把二次型 $Q=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k$ 考虑为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数. 如 Q 恒等于零，则它的所有系数全为零. 这一点，只要把 Q 对 x_i、x_k 偏微分，即可看清楚.

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i\partial x_k}=a_{ik}+a_{ki}=2a_{ik}=0$$

利用这个性质，当两个二次型 Q、Q' 作为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，取值恒等时，则它们的系数完全相同. 也就是，当

$$Q=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k$$

$$Q'=\sum_{i,k=1}^{n}a'_{ik}x_ix_k$$

可得

$$Q - Q' = \sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik} - a'_{ik}) x_i x_k = 0$$

根据前面的性质，就得到

$$a_{ik} = a'_{ik}$$

因此可以说，研究对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的性质和研究二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的性质是完全相同的.

对二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 进行线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，化为下式

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{P}^T)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y}$$

即用这个线性变换，使二次型的系数矩阵由 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

往往把矩阵 A 的秩称作二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩. 如果二次型 $Q=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 r，则用适当的正则矩阵 $\boldsymbol{P}$ 进行线性变换 $x=\boldsymbol{P}y$，可将 Q 化为下式

$$Q = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \cdots + a_r y_r^2 \qquad (a_i \neq 0) \tag{3.45}$$

上式称为二次型 Q 的标准形.

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 对 $x=0$ 以外的一切 x 都取正值时，则二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 叫正定的. 如果 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 对一切 $\boldsymbol{x}$ 不取负值，且有不为 0 的 $\boldsymbol{x}$ 使 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，则二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 及其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 叫准正定的. 对负定或准负定亦可下同样的定义.

二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 或对称矩阵 A 是正定的条件有下面两种形式：

(1)二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 或对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的必要充分条件是 $\boldsymbol{A}$ 的一切特征值都是正的. 而 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 或对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为准正定的必要充分条件是 A 的一切特征值不为负，并且至少有一个特征值等于零.

(2)二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 或对称矩阵 A 为正定的必要充分条件是 $\boldsymbol{A}$ 的一切主子行列式为正(塞尔维斯定理).

根据(1)的判定法，在 $\boldsymbol{A}$ 的维数较高时，用起来比较困难，而(2)的判定法计算比较方便. 判定负定时，只要用 $-\boldsymbol{A}$ 代替 A 照样

用上面的判定法即可.

〔例 6〕试判定二次型 $Q = 3x_1^2 + 7x_1x_2 + 4x_2^2$ 是否正定?

〔解〕用矩阵符号表示二次型

$$Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 3 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的主子行列式分别为

$$3 > 0, \begin{vmatrix} 3 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 4 \end{vmatrix} = -0.25 < 0$$

所以 Q 不是正定的.

§4 转移矩阵

现在讨论状态方程(2.11)的解法. 先略去强制项 $B(t)u(t)$,考虑齐次部分

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{4.1}$$

然后讨论非齐次项对解的影响.

一、转移矩阵的一般提法

1. 转移矩阵 前面指出,对于任意给定的时刻 t 对应着一个状态向量. 每个状态向量对应着状态空间一个点. 不同的时刻对应着状态空间不同的点. 随着时间的推移,状态向量将在状态空间描绘出一条轨迹,如图 4-1 所示. 同时,由线性微分方程组的存在和唯一性定理可知,方程(4.1)的一般解是一个曲线簇. 对于给定的初始条件,只有一条状态轨迹满足式(4.1).

另一方面,状态向量是 n 维向量. 一个$(n\times n)$矩阵和它相乘将得到另一个 n 维向量. 这样就提出一个可以想象的问题,即是否存

在这样的矩阵(一般地说是时间 t 的函数),它和某一状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 相乘之后所得到的另一个 n 维向量也是状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$,并且其端点落在通过 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的状态轨迹上?

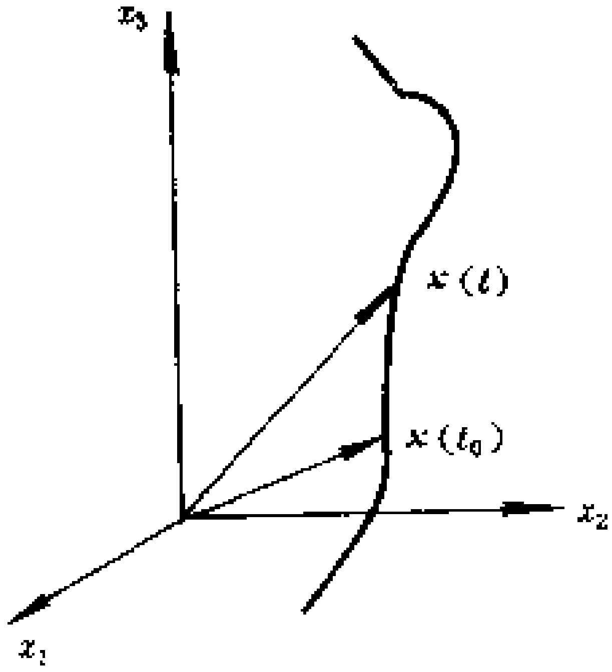


图 4-1　状态转移过程

先假定这样的矩阵存在,并用 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$表示.于是

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \quad (4.2)$$

并且满足方程(4.1).由于

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \quad (4.3)$$

有

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \quad (4.4)$$

$\boldsymbol{x}(t_0)$是任意初始向量,要使式(4.4)得到满足,当且仅当

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0) \quad (4.5)$$

另一方面,由式(4.2)有

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \quad (4.6)$$

同样,由于 $\boldsymbol{x}(t_0)$是任意初始向量,有

$$\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0) = \boldsymbol{I} \quad (4.7)$$

反过来,满足式(4.5)和(4.7)的矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$就可以通过式(4.2)得到另一个状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$,它是方程(4.1)的解,并且其端点和 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的端点落在同一条轨迹上.这样的矩阵称为状态转移矩阵,简称转移矩阵.

设 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$的元素用 $x_{ik}(t,t_0)$表示:

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0) = \begin{bmatrix} x_{11}(t,t_0) & x_{12}(t,t_0) & \cdots & x_{1n}(t,t_0) \\ x_{21}(t,t_0) & x_{22}(t,t_0) & \cdots & x_{2n}(t,t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t,t_0) & x_{n2}(t,t_0) & \cdots & x_{nn}(t,t_0) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

于是式(4.5)可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11}(t,t_0) & \dot{x}_{12}(t,t_0) & \cdots & \dot{x}_{1n}(t,t_0) \\ \dot{x}_{21}(t,t_0) & \dot{x}_{22}(t,t_0) & \cdots & \dot{x}_{2n}(t,t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_{n1}(t,t_0) & \dot{x}_{n2}(t,t_0) & \cdots & \dot{x}_{nn}(t,t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11}(t,t_0) & x_{12}(t,t_0) & \cdots & x_{1n}(t,t_0) \\ x_{21}(t,t_0) & x_{22}(t,t_0) & \cdots & x_{2n}(t,t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t,t_0) & x_{n2}(t,t_0) & \cdots & x_{nn}(t,t_0) \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

如果矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 的每一列由向量 $\varphi_i(t,t_0)$ 表示:

$$\varphi_1(t,t_0) = \begin{bmatrix} x_{11}(t,t_0) \\ x_{21}(t,t_0) \\ \vdots \\ x_{n1}(t,t_0) \end{bmatrix}; \quad \varphi_2(t,t_0) = \begin{bmatrix} x_{12}(t,t_0) \\ x_{22}(t,t_0) \\ \vdots \\ x_{n2}(t,t_0) \end{bmatrix};$$

$$\cdots; \quad \varphi_n(t,t_0) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t,t_0) \\ x_{2n}(t,t_0) \\ \vdots \\ x_{nn}(t,t_0) \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

那么方程(4.9)也可写成向量形式

$$\dot{\varphi}_i(t,t_0) = A(t)\varphi_i(t,t_0) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4.11}$$

由于式(4.7)

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t_0,t_0) & x_{12}(t_0,t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0,t_0) \\ x_{21}(t_0,t_0) & x_{22}(t_0,t_0) & \cdots & x_{2n}(t_0,t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t_0,t_0) & x_{n2}(t_0,t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0,t_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

于是

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t_0,t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1; \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t_0,t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_n;$$

$$\cdots; \boldsymbol{\varphi}_n(t_0,t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_n \tag{4.13}$$

式中 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 分别表示状态空间的 n 个单位向量.

因此,可以认为转移矩阵由这样 n 个列向量构成:它们都是齐次方程(4.1)的解,其初值分别为状态空间的各个单位向量.

由于状态方程的齐次形式不包含输入量 $\boldsymbol{u}(t)$,所以它描写系统不受控制下的内部关系.转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 是系统在状态空间自由演变过程(或称自由响应)的描写.它取决于系统的内部特性,在数学关系上由系统矩阵 $A(t)$ 决定.

转移矩阵具有如下性质:

(1) $\quad \boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0) = \boldsymbol{I}$ (4.14)

(2) $\quad \boldsymbol{\Phi}(t,t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ (4.15)

(3) $\quad \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 是非奇异矩阵,且

$$\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t) \tag{4.16}$$

性质(1)由式(4.13)可知.

性质(2)可在式(4.13)中考虑初始条件为 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 和 $\boldsymbol{x}((t_1)$ 两种情况，这时有

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)=\Phi(t,t_1)\boldsymbol{x}(t_1)$$

而在 $x(t_1)$ 和 $x(t_0)$ 间，显然有

$$\boldsymbol{x}(t_1)=\Phi(t_1,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

把它代入前式，就有

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

所以，$\Phi(t,t_0)=\Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_0)$

性质(3)可由逆矩阵的性质

$$\Phi^{-1}(t,t_0)\Phi(t,t_0)=\boldsymbol{I}$$

和性质(1)$\Phi(t_0,t_0)=\boldsymbol{I}$，有

$$\Phi^{-1}(t,t_0)\Phi(t,t_0)=\Phi(t_0,t_0)$$

把性质(2)用于上式右端，可得

$$\Phi^{-1}(t,t_0)\Phi(t,t_0)=\Phi(t_0,t)\Phi(t,t_0)$$

上式两边右乘 $\Phi^{-1}(t,t_0)$，就得到

$$\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$$

2. 含强制项线性状态方程的一般解　状态转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 确定之后，根据式(4.2)就可确定系统的状态在不受控制下在状态空间的转移过程. 式(4.2)也可称为系统自由演变的状态转移方程.

现在考虑非齐次方程(2.11)：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

的解，我们先将非齐次方程(2.11)的一般解写成

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t,t_0)\boldsymbol{h}(t) \tag{4.17}$$

微分上式两端，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\right]\boldsymbol{h}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{h}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}(t)}{\mathrm{d}t}$$

把上式和式(2.11)比较，就可得到

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

也就是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,t_0)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

把上式两端积分，并注意到式(4.17)和初始条件，有

$$\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)\boldsymbol{h}(t_0)=\boldsymbol{h}(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

就得到 $\boldsymbol{h}(t)$ 的表示如下

$$\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau,t_0)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

上式两端左乘 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$，就可求得 $\boldsymbol{x}(t)$ 为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\left\{\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau,t_0)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}$$
$$=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (4.18)$$

上式是初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 时方程(2.11)的解.解的这种形式描写了有受迫项时系统在状态空间的演变过程.因此，也是一般线性控制系统的状态转移方程.

由式(4.18)还可看出，含受迫项的状态方程的解由两部分迭加而成：右边第一项表示系统在状态空间的自由演变；第二项表示输入量对状态转移过程的影响，它通过系统内部特性(由 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 或 $\boldsymbol{A}(t)$ 来描写)以及系统和输入量的相互关系 $\boldsymbol{B}(t)$ 来实现.

输出向量 $\boldsymbol{y}(t)$ 很容易根据输出方程(2.12)求得：

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau + D(t)u(t)$$

二、定常系统的转移矩阵

我们来研究状态方程的系数与时间无关的系统(称定常系统):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4.19}$$

首先来求解齐次方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{4.20}$$

满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的解. 为此,用无穷级数来定义矩阵的指数函数

$$e^{At} = 1 + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + A^n\frac{t^n}{n!} + \cdots \tag{4.21}$$

再来研究这样定义的 e^{At}的性质. 先令 $t=0$,可得

$$e^{A0} = I \tag{4.22}$$

把式(4.21)两端对 t 微分,可得下式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{At}) = A + A^2t + \cdots + A^n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = Ae^{At} \tag{4.23}$$

此外,由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{At}x_0) = Ae^{At}x_0 \tag{4.24}$$

所以,$x(t)=e^{At}x_0$ 是满足初始条件 $x(0)=x_0$ 时式(4.20)的解.

由这些情况可知,常系数状态方程式(4.19)的转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$可用下式表示

$$\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)} \tag{4.25}$$

特别在 $t_0=0$ 的场合,可写成

$$\Phi(t,0) = \Phi(t)$$

下面列出定常系统转移矩阵 $\Phi(t)$的几个重要性质:

(1) $\Phi(t+\tau) = \Phi(t)\Phi(\tau)$ (4.26)

$$\Phi(t)\Phi(\tau)=\Phi(\tau)\Phi(t) \tag{4.27}$$

(2) $$\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t) \tag{4.28}$$

(3) $$\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)=\Phi(t,\tau) \tag{4.29}$$

最后，满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 时，定常系统状态方程(4.19)的解，可根据变系数方程的解和转移矩阵的性质，用下式来表示

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=e^{At}\left\{\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}\\&=e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{4.30}$$

或

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\Phi(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.31}$$

〔例 4〕试求解由 $\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)=u(t)$ 所表示的系统的状态方程. 假定 $u(t)$是单位阶跃函数 $1(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t\leq 0\end{cases}$

〔解〕 令

$$x_1(t)=x(t)$$

$$x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\dot{x}(t)$$

状态方程就变为下式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

可见系统矩阵和驱动矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

根据式(4.25)转移矩阵就可用下式表示

$$\begin{aligned}\Phi(t,0)=\Phi(t)=e^{At}&=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}t\\&+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}^3\frac{t^3}{3!}+\cdots\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\frac{t^2}{2!}$$

$$+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1 & t-\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^3}{3!}-\cdots\\0 & 1-t+\dfrac{t^2}{2!}-\dfrac{t^3}{3!}+\cdots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-t}\\0 & e^{-t}\end{bmatrix}$$

其次，根据式(4.31)，$\boldsymbol{x}(t)$可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

这样，$\boldsymbol{x}(t)$可求得如下

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-t}\\0 & e^{-t}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}x_{10}\\x_{20}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-\tau}\\0 & e^{-\tau}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-\tau}\\0 & e^{-\tau}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}x_{10}\\x_{20}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-e^t+t+1\\e^t-1\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}-(x_{20}-1)e^{-t}+t+x_{10}+x_{20}-1\\(x_{20}-1)e^{-t}+1\end{bmatrix}$$

在这里转移矩阵是直接由级数定义中求出的．但在一般情形下这是非常困难的．这时我们就想办法找出符合初始条件为 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 的特解．事实上，本题的状态方程的齐次部分由两个一阶方程构成：

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=-x_2(t)$$

对于初始条件

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1$$

可得

$$x_1(t) = 1 = x_{11}(t)$$

$$x_2(t) = 0 = x_{21}(t)$$

对于初始条件

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2$$

也可以找到特解为

$$x_{12}(t) = 1 - e^{-t}$$

$$x_{22}(t) = e^{-t}$$

将这两个解结合起来，可得转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

其余和前述方法相同，不再重复.

〔例 5〕计算 e^{At} 的一种有效方法是建立在凯利－哈密尔顿(Cayley－Hamilton)定理基础之上的. 这个定理说明：一个 $n \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 应满足它自身的特征方程. 这样就有可能使我们用 A 的多项式来写出 $\boldsymbol{A}$ 的所有幂，而多项式中 $\boldsymbol{A}$ 的阶次等于或小于 $n-1$，即

$$e^{At} = \alpha_0(t)\boldsymbol{I} + \alpha_1(t)\boldsymbol{A} + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\boldsymbol{A}^{n-1} \qquad (4.32)$$

如果矩阵 A 的各个特征值互不相同，那么为了确定系数 $\alpha_0(t)$，$\alpha_1(t)$，…，$\alpha_{n-1}(t)$，我们可以将 A 的各个特征值代入到方程(4.32)的纯量形式中，以得到 n 个联立方程，然后确定系数 $\alpha_0(t)$，$\alpha_1(t)$，…，$\alpha_{n-1}(t)$.（注意，如果 $\boldsymbol{A}$ 有多重特征值，那么这种方法必须要稍作修改. 详细情况可参看有关线性代数的书籍.）

利用刚才介绍的方法来求 e^{At}，式中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

〔解〕A 的各个特征值可由下式求出：

$$|\lambda I-A|=0$$

或

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{vmatrix}=0$$

因此

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$$

e^{At}可展开为

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A \tag{4.33}$$

这个方程的纯量形式为

$$e^{\lambda t}=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda \tag{4.34}$$

将 $\lambda=\lambda_1=-1$ 代入方程(4.34)，可得

$$e^{-t}=\alpha_0(t)-\alpha_1(t) \tag{4.35}$$

同样，将 $\lambda=\lambda_2=-2$ 代入方程(4.34)得

$$e^{-2t}=\alpha_0(t)-2\alpha_1(t) \tag{4.36}$$

由方程(4.35)和(4.36)中解出 $\alpha_0(t)$和 $\alpha_1(t)$，得到

$$\alpha_0(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$$

$$\alpha_1(t)=e^{-t}-e^{-2t}$$

将这些值代入到方程(4.33)中，可得

$$\begin{aligned}e^{At}&=(2e^{-t}-e^{-2t})I+(e^{-t}-e^{-2t})A\\&=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

事实上，对于定常系统状态方程的转移矩阵，还可以用拉普拉斯变换求出，详见本章§6.

三、时变系统的转移矩阵

当线性系统状态方程的系数随时间改变时，称为时变系统．在

时变系统中，它的转移矩阵的实际求法不一定是容易的. 为了求得变系数系统的转移矩阵，现在已找到了各种各样的方法. 这里对其中几个方法加以简要说明.

按理说，我们应研究式(4.37)所示的齐次向量方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{4.37}$$

但我们首先来考察与此对应的标量方程

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t) \tag{4.38}$$

的解. 再从这个方程的解来类推方程(4.37)的解.

如所周知，方程(4.38)的解可用下式表示：

$$x(t)=\left[e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}\right]x(t_0)$$

与此类似，可把方程(4.37)的解表示如下

$$\boldsymbol{x}(t)=\left[e^{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)d\tau}\right]\boldsymbol{x}(t_0) \tag{4.39}$$

现在研究，式(4.39)是否真的是式(4.37)的解. 把式(4.39)按照式(4.21)展开：

$$\boldsymbol{x}(t)=\left[I+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)d\tau+\frac{1}{2!}\left\{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)d\tau\right\}^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3!}\left\{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)d\tau\right\}^3+\cdots\right]\boldsymbol{x}(t_0)$$

上式两边对 t 微分就得到下式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\left\{\boldsymbol{A}(t)+\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)d\tau\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)d\tau\cdot\boldsymbol{A}(t)\right]+\cdots\right\}\boldsymbol{x}(t_0)$$

把上式代入式(4.37)时，一般来说等号不成立，这是由于[ ]内的微分过程不能合并. 为了使等号成立，就要有

$$\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)d\tau\cdot\boldsymbol{A}(t)$$

即 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)d\tau$ 和 $\boldsymbol{A}(t)$ 必须是可交换的，而为了使 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)d\tau$ 和 $\boldsymbol{A}(t)$

可交换，下式必须在任意时刻都成立.

$$A(t)\int_{t_0}^{t}A(\tau)\mathrm{d}\tau-\int_{t_0}^{t}A(\tau)\mathrm{d}\tau\cdot A(t)$$

$$=\int_{t_0}^{t}\{A(t)A(\tau)-A(\tau)A(t)\}\mathrm{d}\tau=0$$

也就是，对任意时刻 t_1 和 t_2，下式成立

$$A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1) \tag{4.40}$$

这就是式(4.39)为式(4.37)的解的必要充分条件. 因此，如果满足式(4.40)所示的可交换条件，从式(4.13)就可知道转移矩阵可用下式给出

$$\Phi(t,t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

$$=I+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2+\cdots \tag{4.41}$$

下面再来研究，不满足式(4.40)的可交换条件时，转移矩阵的求法.

当给定初始条件为 $x(t_0)$ 时，对式(4.37)两边积分，得到下式

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}A(\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.42}$$

上式是向量积分方程，把上式依次代入右边的 $x(\tau)$，就能求解此方程式. 例如，第一次代入时，式(4.42)变为下式

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\left[x(t_0)+\int_{t_0}^{\tau}A(\lambda)x(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}\tau \tag{4.43}$$

为了说明方便起见，引入下式所示的积分算子 Q：

$$Q(\quad)=\int_{t_0}^{t}(\quad)\mathrm{d}\tau$$

反复地使用这个积分算子，式(4.42)就可用下式表示

$$x(t)=[I+Q(A)+Q(AQ(A))+Q(AQ(AQ(A)))$$
$$+\cdots]x(t_0) \tag{4.44}$$

式中，A 的自变量省略了. 如果 A 的元素在积分区间内有界，这个级数就绝对收敛. 在这种情况下，来研究下面的方阵

$$G(A) = I + Q(A) + Q(AQ(A)) + \cdots \tag{4.45}$$

假定上式两边对 t 可微，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(A) = AG(A) \tag{4.46}$$

显然，$G(A)$是式(4.37)的一个解.

因此，求得转移矩阵为

$$\Phi(t,t_0) = G(A) \tag{4.47}$$

并且

$$x(t) = G(A)x(t_0) = \Phi(t,t_0)x(t_0) \tag{4.48}$$

当然，在 A 是常系数矩阵时，转移矩阵就变为

$$\begin{aligned}\Phi(t,t_0) &= I + (t-t_0)A + \frac{(t-t_0)}{2!}A^2 + \cdots \\ &= e^{A(t-t_0)}\end{aligned}$$

上式和式(4.25)是一致的.

§5 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换是解线性常微分方程的有力工具. 在经典控制理论中有着广泛的应用. 为了便于运用，在本节进行简要的回顾. 如果读者要求得到严格的证明和推导，请阅读有关数学物理方法方面的书籍.

一、拉普拉斯变换的定义

设 s 是复数，$f(t)$是$(0,\infty)$上的单值函数，定义积分

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

为 $f(t)$的拉普拉斯变换，记作

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$$

$F(s)$称作 $f(t)$的象函数，$f(t)$称为 $F(s)$的原函数.

只要 $f(t)$在有限区间内存在有限个第一类间断点(有限阶跃，或虽无限但可移去间断点)，并且当 t 大于某个 T 后，有

$$|f(t)|e^{-\alpha t} < M \qquad (\alpha, M > 0) \tag{5.2}$$

则积分(5.1)对于

$$Re(s) > \alpha \tag{5.3}$$

的所有复数绝对收敛，并存在逆变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \quad (c > \alpha) \tag{5.4}$$

记作

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

式中

$$j = \sqrt{-1}$$

〔例 1〕求常数 a 的拉普拉斯变换

〔解〕

$$F(s) = \int_0^\infty a e^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{a}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty$$

或

$$F(s) = \frac{a}{s} \tag{5.5}$$

关于拉普拉斯变换，以下两点必须特别注意：

(1)定义区间　根据定义，$f(t)$定义于$(0,\infty)$上，对于 $t<0$，我们则假定 $f(t)=0$. 在例 1 的情形下，我们规定：

$$f(t) = \begin{cases} A & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

由于函数在 $t=0$ 处从 0 跳到 A，故被称为阶跃函数. 若 $A=1$，则称为单位阶跃函数. 记作

$$1(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{5.7}$$

它的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}[1(t)]=\frac{1}{s} \tag{5.8}$$

(2)关于拉普拉斯积分下限的说明　在某些情况下，$f(t)$在$t=0$处包含一个脉冲函数，那么拉普拉斯积分的下限必须清楚地指出是0_{+}或是0_{-}，因为，对于这两种下限$f(t)$的拉普拉斯变换是不相同的. 假若拉普拉斯积分下限的这种差别是必要的，那么我们就使用下面的标记：

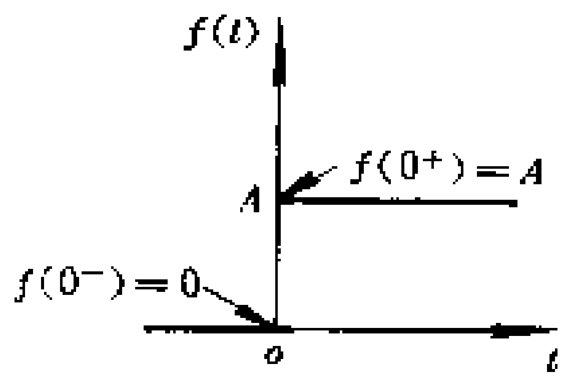


图 5-1　阶跃函数

$$\mathscr{L}_{+}[f(t)]=\int_{0_{+}}^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{L}_{-}[f(t)]=\int_{0_{-}}^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\mathscr{L}_{+}[f(t)]+\int_{0_{-}}^{0_{+}}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

如果$f(t)$在$t=0$处包含一个脉冲函数，那么

$$\mathscr{L}_{+}[f(t)]\neq\mathscr{L}_{-}[f(t)]$$

因为，在$t=0$处包含一个脉冲函数的情况下，

$$\int_{0_{-}}^{0_{+}}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t\neq 0$$

显然，假若在$t=0$处不包含脉冲函数，则

$$\mathscr{L}_{+}[f(t)]=\mathscr{L}_{-}[f(t)]$$

二、拉普拉斯变换的性质

1. **线性定理**　设a,b为任意常数，且$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，$\mathscr{L}[g(t)]=G(s)$，则

$$\mathscr{L}[af(t)+bg(t)]=aF(s)+bG(s) \tag{5.9}$$

2. **t域内的位移定理**　若T为常数，则

$$\mathscr{L}[f(t+T)] = e^{sT}F(s) \tag{5.10}$$

〔证〕令 $\tau = t + T$，则有 $d\tau = dt$，$t = \tau - T$；并假定 $\tau \leqslant 0$ 时 $f(\tau) = 0$. 于是

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t+T)] &= \int_0^{\infty} f(t+T)e^{-st}dt \\
&= \int_T^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau-T)}d\tau \\
&= e^{sT}\left[\int_T^{0} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau + \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right] \\
&= e^{sT}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{sT}F(s)
\end{aligned}$$

3. s **域内的位移定理** 若 α 为常数，则

$$F(s-\alpha) = \mathscr{L}[f(t)e^{\alpha t}] \tag{5.11}$$

〔证〕

$$\begin{aligned}
F[f(t)e^{\alpha t}] &= \int_0^{\infty} f(t)e^{\alpha t}e^{-st}dt \\
&= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-\alpha)t}dt = F(s-\alpha)
\end{aligned}$$

4. **相似定理** 若 $a>0$，则

$$\mathscr{L}[f(t/a)] = aF(as) \tag{5.12}$$

〔证〕令 $\tau=t/a$，于是 $t=a\tau$，$dt=ad\tau$，

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t/a)] &= \int_0^{\infty} f(t/a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-as\tau}(ad\tau) \\
&= a\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-(as)\tau}d\tau \\
&= aF(as)
\end{aligned}$$

5. **卷积定理**

$$\mathscr{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s) \tag{5.13}$$

式中

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$$
$$G(s)=\mathscr{L}[g(t)]$$

且

$$f(t)*g(t)=\int_0^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (5.13a)$$

称为函数 $f(t)$和 $g(t)$的卷积.

〔证〕

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)*g(t)]&=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right]e^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}g(\tau)\int_0^{\infty}f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}g(\tau)F(s)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\\&=F(s)\int_0^{\infty}g(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\\&=F(s)G(s)\end{aligned}$$

上面应用了式(5.10).

由于 $f(t)$是拉普拉斯变换的原函数,按前面的规定:当 $t<0$,$f(t)=0$. 于是对于 $f(t-\tau)$,当 $\tau>t$,$f(t-\tau)=0$. 所以式(5.13a)还可以写为

$$f(t)*g(t)=\int_0^{t}f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (5.13b)$$

6. **积分定理**

$$\mathscr{L}\left[\int_0^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)+\frac{f^{(-1)}(0)}{s} \qquad (5.14)$$

式中

$$f^{(-1)}(0)=\left[\int_0^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]_{t\to 0}$$

〔证〕

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\int_0^{\infty}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]_{t\to 0}$$

$$=\frac{1}{s}F(s)+\frac{f^{(-1)}(0)}{s}$$

证毕.

7. 微分定理

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=sF(s)-f(0) \tag{5.15}$$

〔证〕

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-st}\mathrm{d}f(t)$$

$$=e^{-st}f(t)\Big|_0^{\infty}+s\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=-f(0)+sF(s)$$

8. 初值定理和终值定理 作为微分定理的推论有

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s) \tag{5.16}$$

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s) \tag{5.17}$$

因为根据微分定理的证明过程，下面等式成立：

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\mathrm{d}f(t)=-f(0)+sF(s)$$

如 $s\to\infty$，上式右边趋于零，于是

$$-f(0)+sF(s)=0$$

注意到

$$f(0)=\lim_{t\to 0}f(t)$$

可以看出，式(5.16)成立.

同理，令 $s=0$，可以证明终值定理，即式(5.17)成立.

〔例 2〕设 $f(t)=\sin\omega t$，求 $F(s)$.

〔解〕因为

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}]$$

所以

$$\mathscr{L}[\sin\omega t] = \frac{1}{2j}\int_0^{\infty}[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}]e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t}\mathrm{d}t - \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{e^{-(s+j\omega)t}}{s+j\omega} - \frac{e^{-(s-j\omega)t}}{s-j\omega}\right]_0^{\infty}$$

于是

$$\mathscr{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

上面运用了线性定理.

〔例 3〕求 $f(t)=t^n$(n 为自然数)的拉普拉斯变换.

〔解〕

$$\mathscr{L}[t^n] = \int_0^{\infty} t^n e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{s}t^n e^{-st}\Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{n}{s}\mathscr{L}[t^{n-1}]$$

这是一个递推关系，可以一直进行到底：

$$\mathscr{L}[t^n] = \frac{n!}{s^n}\mathscr{L}[1(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

上面最后考虑到了〔例 1〕的结果.

一些常见函数的拉普拉斯变换结果列入附录 A.1.

三、有理分式的拉普拉斯反变换

用式(5.4)直接积分求拉普拉斯变换的反变换，原则上是可行的，但在实际问题中常常非常复杂. 由于经典控制理论所涉及的象函数大量是有理分式，对于这类问题，一般只需应用前述那些定理及若干简单函数的拉普拉斯变换关系便可解决.

〔例 4〕求 $F(s)=\dfrac{s+5}{s^2+4s+3}$ 的反变换.

〔解〕考虑到

$$\text{分母}=(s+1)(s+3)$$
$$\text{分子}=2(s+3)-(s+1)$$

故

$$F(s)=\frac{2(s+3)-(s-1)}{(s+1)(s+3)}=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+3}$$

由〔例 1〕，有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1(t)$$

由位移定理，有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]=e^{-3t}$$

同理

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=e^{-t}$$

故

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+5}{s^2+4s+3}\right]=2e^{-t}-e^{-3t}$$

综上所述，这个例题的解题步骤归纳为：

(1)求出分母多项式的根；

(2)将有理分式展开成部分分式之和；

(3)求部分分式的反变换. 下面集中讨论有理分式展开法.

设一般情形下的有理分式为

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_0}{s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0} \tag{5.18}$$

这里假定 $n>m$. 若 $n\leqslant m$，则可通过除法，得到一个 $n>m$ 的有理分式(余数)和一个多项式(商)之和. 这里重点讨论有理真分式的反变换.

若 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是方程

$$s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0=0 \tag{5.19}$$

的根(包括实根和复根)，则(5.18)有

$$F(s)=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_0}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \tag{5.20}$$

下面按方程(5.19)是否有重根讨论(5.21)式的展开式.

(1)没有重根的情形　如果 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 各不相同，则(5.20)式可展开为

$$F(s)=\frac{c_1}{s-s_1}+\frac{c_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n} \tag{5.21}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为常数，可以是复数. 用 $(s-s_1)$ 乘两边，并取 $s=s_1$，有

$$[(s-s_1)F(s)]_{s=s_1}=\left[c_1+c_2\frac{s-s_1}{s-s_2}+\cdots+c_n\frac{s-s_1}{s-s_2}\right]_{s=s_1} \tag{5.22}$$

上式右边方括号内除第一项以外全为零，所以

$$c_1=[(s-s_1)F(s)]_{s=s_1} \tag{5.23}$$

上式在应用时要先将 $(s-s_1)$ 和 $F(s)$ 的分母中相同的因子先约去再求值. 还可用另一种方法，即求不定式的极限：

$$\begin{aligned}c_1&=\lim_{s\to s_1}[(s-s_1)F(s)]=\lim_{s\to s_1}\left[\frac{s-s_1}{B(s)}\right]A(s_1)\\&=\lim_{s\to s_1}\frac{(s-s_1)'}{B'(s)}A(s_1)=\frac{A(s_1)}{B'(s_1)}\end{aligned}$$

或

$$c_1 = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)} \tag{5.24}$$

依此类推，可以求出所有 $c_1, \cdots, c_n$.

〔例 5〕设 $F(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

〔解〕设

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

用$(s+1)$乘两边有

$$\frac{s+3}{s+2} = c_1 + c_2\frac{s+1}{s+2}$$

取 $s=-1$，有

$$c_1 = \left(\frac{s+3}{s+2}\right)_{s=-1} = 2$$

同理

$$c_2 = -1$$

于是

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right] = 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$
$$= 2e^{-t} - e^{-2t}$$

c_1, c_2 也可以按式(5.24)求出，因

$$B(s) = s^2 + 3s + 2 \qquad B'(s) = 2s + 3$$

所以

$$c_1 = \left(\frac{s+3}{2s+3}\right)_{s=-1} = 2; \quad c_2 = \left(\frac{s+3}{2s+3}\right)_{s=-2} = -1$$

和前面结果相同.

(2)有重根情形　设 s_1 是方程(5.19)的 l 重根；$s_{l+1}, \cdots, s_n$ 是其余 $(n-l)$ 个各不相同的根. 于是

$$F(s) = \frac{A(s)}{(s-s_1)^l(s-s_{l+1})\cdots(s-s_n)} \tag{5.25}$$

可展开为

$$F(s)=\frac{d_l}{(s-s_1)^l}+\frac{d_{l-1}}{(s-s_1)^{l-1}}+\cdots+\frac{d_1}{s-s_1}$$
$$+\frac{c_l+1}{s-s_l+1}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n} \tag{5.26}$$

其中单根系数 $c_{l+1},\cdots,c_n$ 求法和前面一样，可由式(5.23)或式(5.24)得到．现在考虑重根系数 $d_l,\cdots,d_1$ 的求法．将式(5.26)两边乘以 $(s-s_1)^l$ 得

$$(s-s_1)^lF(s)=d_l+d_{l-1}(s-s_1)+\cdots+d_1(s-s_1)^{l-1}$$
$$+c_{l+1}\frac{(s-s_1)^l}{(s-s_{l+1})}+\cdots+c_n\frac{(s-s_1)^l}{(s-s_n)} \tag{5.27}$$

取 $s=s_1$，由上式可得

$$d_l=[(s-s_1)^lF(s)]_{s=s_1} \tag{5.28}$$

将式(5.27)两边对 s 求一阶导数，并取 $s=s_1$，有

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-s_1)^lF(s)]\right\}_{s=s_1}=\left\{\frac{\mathrm{d}d_l}{\mathrm{d}s}+d_{l-1}\frac{\mathrm{d}(s-s_1)}{\mathrm{d}s}\right.$$
$$+d_{l-2}\frac{\mathrm{d}(s-s_1)^2}{\mathrm{d}s}+\cdots+d_1\frac{\mathrm{d}(s-s_1)^{l-1}}{\mathrm{d}s}$$
$$\left.+c_{l+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{(s-s_1)^l}{s-s_{l+1}}\right]+\cdots+c_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{(s-s_1)^l}{s-s_n}\right]\right\}_{s=s_1}$$

上式右边除第二项外全为零，于是

$$d_{l-1}=\frac{1}{1!}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-s_1)^lF(s)]\right\}_{s=s_1}$$

依此类推，一直可求得

$$d_1=\frac{1}{(l-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}s^{l-1}}[(s-s_1)^lF(s)]\right\}_{s=s_1}$$

其中第 k 项系数可以写成：

$$d_k=\frac{1}{(l-k)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{(l-k)}}{\mathrm{d}s^{l-k}}[(s-s_1)^lF(s)]\right\}_{s=s_1} \tag{5.29}$$

由于根据例 3 的结果，有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^m}\right]=\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}$$

于是

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-s_1)^m}\right]=\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{s_1 t} \tag{5.30}$$

对式(5.26)右边逐项应用关系式(5.30)可得反变换为

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]\\&=\left[\frac{d_l}{(l-1)!}t^{l-1}+\frac{d_{l-1}}{(l-2)!}t^{l-2}+\cdots+d_1\right]e^{s_1 t}\\&\quad+c_{l+1}e^{s_{l+1}t}+\cdots+c_n e^{s_n t}\end{aligned} \tag{5.31}$$

〔例 6〕若 $F(s)=\dfrac{4(s+3)}{(s+2)^2(s+1)}$ 求 $f(t)$.

〔解〕设

$$\frac{4(s+3)}{(s+2)^2(s+1)}=\frac{d_2}{(s+2)^2}+\frac{d_1}{s+2}+\frac{c_3}{s+1}$$

于是

$$d_2=\left[\frac{4(s-3)}{s+1}\right]_{s=-2}=-4$$

$$d_1=\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{4(s+2)}{s+1}\right]\right\}_{s=-2}=-8$$

$$c_3=\left[\frac{4(s+3)}{(s+2)^2}\right]_{s=-1}=8$$

故

$$f(t)=-4(t+2)e^{-2t}+8e^{-t}$$

从以上的论证和例题可以看出，把 s 的有理分式函数 $F(s)=\dfrac{A(s)}{B(s)}$ 进行反变换. 分母多项式 $B(s)=0$ 的根对反变换所得的原函数的形式起决定作用. 而分子多项式 $A(s)$ 只决定 $f(t)$ 各项的系

数. 后面将指出方程(5.19)的根决定控制系统的性质.

§6 传递函数

有了§5的数学基础,不难对线性定常系统的状态方程施行拉普拉斯变换.一方面为求解这类方程提供了简便的方法;另一方面导出了经典控制理论用来描写系统的传递函数.

一、状态方程的拉普拉斯变换解法

1. 向量的拉普拉斯变换 设

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}\tag{6.1}$$

有

$$\mathscr{L}[\boldsymbol{x}(t)]=\begin{bmatrix}\mathscr{L}[x_1(t)]\\\mathscr{L}[x_2(t)]\\\vdots\\\mathscr{L}[x_n(t)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\\\vdots\\X_n(s)\end{bmatrix}=\boldsymbol{X}(s)\tag{6.2}$$

同理有

$$\mathscr{L}[\boldsymbol{u}(t)]=\begin{bmatrix}U_1(s)\\U_2(s)\\\vdots\\U_l(s)\end{bmatrix}=\boldsymbol{U}(s)\tag{6.3}$$

$$\mathscr{L}[\boldsymbol{y}(t)]=\begin{bmatrix}Y_1(s)\\Y_2(s)\\\vdots\\Y_m(s)\end{bmatrix}=\boldsymbol{Y}(s)\tag{6.4}$$

$$\mathscr{L}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)]=\begin{bmatrix}\mathscr{L}[\dot{x}_1(t)]\\ \mathscr{L}[\dot{x}_2(t)]\\ \vdots\\ \mathscr{L}[\dot{x}_n(t)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}sX_1(s)-x_1(0)\\ sX_2(s)-x_2(0)\\ \vdots\\ sX_n(s)-x_n(0)\end{bmatrix}$$

$$=s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}(0) \tag{6.5}$$

2. **状态方程的拉普拉斯变换解法** 对于线性控制系统的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{2.11}$$

假定系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是常数，对上式进行拉普拉斯变换可得

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

或

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \tag{6.6}$$

上式两边乘以 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$，得

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \tag{6.7}$$

令

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}] \tag{6.8}$$

则式(6.7)的拉普拉斯反变换为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0+\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)]$$

考虑式(6.8)，上式右边第二项可以写成 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ 的卷积. 于是

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.9}$$

可以看出，上式和§4中定常系统状态方程的解，式(4.31)一致. 因此，由式(6.8)规定的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 就是定常系统的转移矩阵. 这里提供了求定常系统转移矩阵的一个简便方法. 因为由逆矩阵求法有

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^*}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|} \tag{6.10}$$

上式分子$[sI-A]^*$（$(sI-A)$的伴随矩阵）是$(n\times n)$矩阵，每个元素都是行列式$|sI-A|$的代数余因子，因而是关于s的$(n-1)$次幂的多项式；分母为n阶行列式，因而也是关于s的n次幂多项式。式(6.10)右边矩阵的每个元素都是关于s的有理真分式，其拉普拉斯反变换不难根据§5的方法求出. 并且分母行列式所构成的多项式决定系统的性质，因此方程

$$|sI-A|=0 \tag{6.11}$$

称为特征方程，其根称为系统的特征值.

事实上，如果系统没有强制项，即$u(t)=0$，则式(6.9)变为

$$x(t)=\Phi(t)x_0 \tag{6.12}$$

称为系统的自由响应. 比喻为系统在没有外界作用下的一种自由演变. 它取决于系统的本身特性. 转移矩阵$\Phi(t)$在描写自由响应时起决定作用. 方程(6.11)决定了转移矩阵的基本性质.

〔例1〕设系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

试用拉普拉斯变换求转移矩阵.

〔解〕这里

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

所以

$$[sI-A]=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s(s+1)}\\ 0 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

对$(sI-A)^{-1}$每个元素进行拉普拉斯反变换可得转移矩阵

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

和§4〔例4〕比较，结果一致.

二、传递函数

1. **传递函数矩阵** 对于定常系统的状态方程和输出方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{2.14}$$

进行拉普拉斯变换. 为简便起见，令 $x_0=0$，由式(5.7)可得

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \tag{6.13}$$

对输出方程(2.14)进行拉普拉斯变换，可得

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s) \tag{6.14}$$

将式(6.13)代入上式可得

$$Y(s) = [\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)$$

令

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{6.15}$$

则

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s) \tag{6.16}$$

根据§2的讨论，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}$ 分别为 n,m,l 维列向量，于是 $G(s)$ 为 $(m\times l)$ 矩阵，通常称为传递函数矩阵. 它的引入，将输入和输出的关系在 s 域变成简单的乘积关系. 如图(6-1)所示，$G(s)$ 代表系统，只要求得 $G(s)$，对于每个给出的 $U(s)$ 就可简便地求得 $Y(s)$.

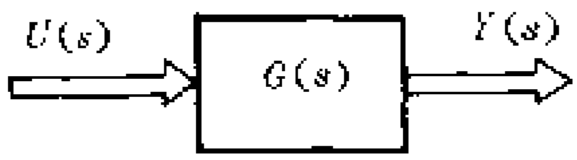


图 6-1 传递函数的表示

应当指出，传递函数矩阵虽然由系数矩阵 A,B,C,D 决定，但不存在一一对应关系. 不同的 A,B,C,D 可以组合成相同的 $G(s)$. 这说明传递函数矩阵 $G(s)$ 只表示输出变量和输入变量之间的数学关系，并不能唯一决定系统的内部状态. 因此，用传递函数矩阵来描写系统就是前面已经提到的黑箱模型.

此外，值得强调指出，式(6.16)导出过程假定了初值向量 $\boldsymbol{x}_0=0$.

2. **标量传递函数** 对于经典控制理论，大量的问题是单输入单输出系统. 这时 $Y(s)$，$U(s)$都是标量. 由式(6.16)同样有

$$Y(s)=G(s)U(s) \tag{6.16a}$$

但这里 $G(s)$也是标量，式(6.16a)右边是标量相乘. 于是有

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} \tag{6.17}$$

这样，传递函数可以比较简便地从实际问题中求得.

〔例 2〕图 6-2 所示的 RC 电路中，输入为 $e_i(t)$，输出为 $e_0(t)$，求传递函数.

〔解〕因电容充电过程有

$$e_o(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$e_i(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

考虑初值为零，对上面两式进行拉普拉斯变换得

$$E_o(s)=\frac{1}{Cs}I(s)$$

$$E_i(s)=RI(s)+\frac{1}{Cs}I(s)$$

两式相除可得传递函数

$$G(s)=\frac{E_0(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$

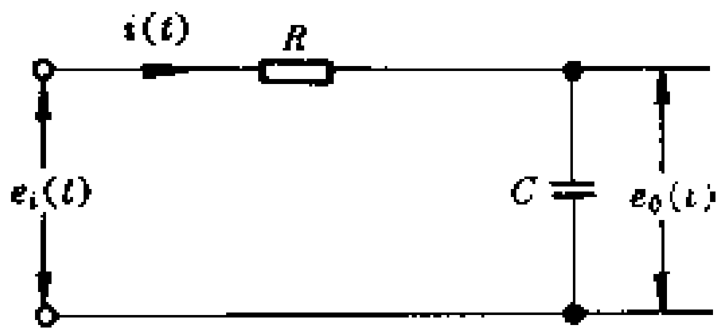


图 6-2 RC 回路

〔例 3〕图 6-3 表示一种通过流体的化学反应器. 设容器体积为 V，流体密度为 ρ，比热为 c，流量为 Q，这些都是常量. A 表示一种热源，可以是反应热，也可以是电

加热. 设它的热功率为 P_i. 由于 A 的加热作用使流出液体温度升高. 为简化起见，设为 P_0. 求热量传输过程的传递函数(假定 P_i 为输入，T 为输出).

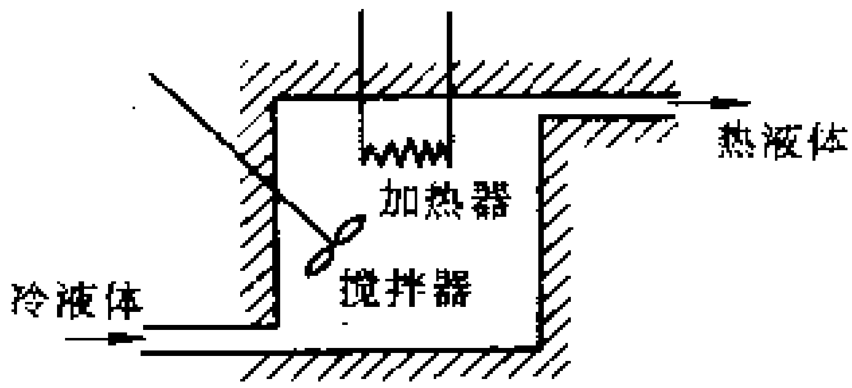


图 6-3 热力系统

〔解〕设在 Δt 时间内反应器温度提高 ΔT，于是

$$P_i(t)\Delta t = \rho cV\Delta T + P_0(t)\Delta t$$
$$P_0(t) = QcT(t)$$

或

$$\Delta t(P_i - P_0) = \rho cV\Delta T$$

当 $\Delta t \to 0$，有

$$\rho cV\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P_i - P_0 \tag{A1}$$

而

$$P_0 = QcT \tag{A2}$$

于是(A1)式变为

$$P_i = \rho cV\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \tag{A3}$$

对(A2)、(A3)两式进行拉普拉斯变换，并考虑初始条件为零. 得

$$P_0(s) = QcT(s)$$
$$P_i(s) = \rho cVsT(s) + QcT(s)$$

或

$$(\rho cVs + QC)T(s) = P_i(s)$$

于是

$$G(s)=\frac{T(s)}{P_i(s)}=\frac{1}{\frac{\rho V}{Q}s+1}\cdot\frac{1}{Qc}$$

〔例 4〕图 6-4 表示一个地震仪. 设 x_i 和 x_o 分别表示壳体和质量为 m 的重块对惯性空间的位移. $y=x_o-x_i$ 表示 m 相对于壳体的位移. 假定 k 为弹簧的弹性系数, f 为阻尼器的阻尼系数. 求以 x_i 为输入, y 为输出的传递函数.

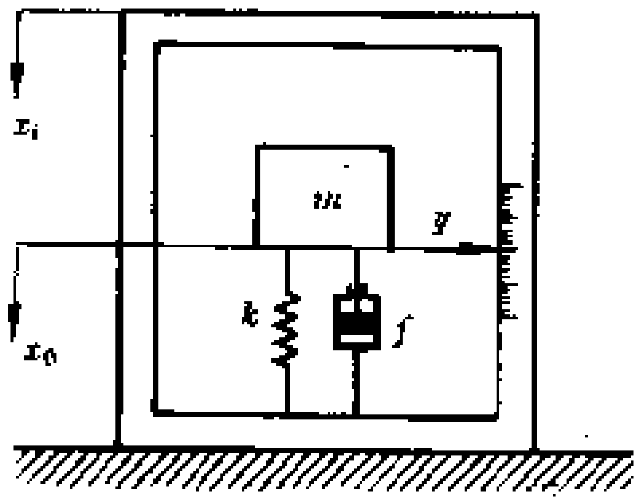


图 6-4 地震仪原理图

〔解〕当地震信号到来之后,系统将发生阻尼振动,方程为

$$m\ddot{x}_0+f(\dot{x}_o-\dot{x}_i)+k(x_0-x_i)=0$$

由题设, $y=x_o-x_i$, 有

$$m\ddot{y}+f\dot{y}+ky=-m\ddot{x}_i$$

取初值为零,求拉普拉斯变换,可得

$$ms^2Y(s)+fsY(s)+kY(s)=-ms^2X_i(s)$$

于是

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X_i(s)}=\frac{-ms^2}{ms^2+fs+k}$$

或

$$G(s)=-\frac{s^2}{s^2+\frac{f}{m}s+\frac{k}{m}}$$

三、脉冲响应

传递函数是复频域(即 s 域)的函数. 现在讨论它在时域的物理意义. 为此先研究脉冲的数学描写.

1. **δ 函数** δ 函数在控制理论中被定义为

$$\delta(t-\tau)=\begin{cases}\infty & 当\ t=\tau\\ 0 & 当\ t\neq\tau\end{cases} \tag{6.18a}$$

且

$$\int_0^{\infty}\delta(t-\tau)\mathrm{d}t = 1 \tag{6.18b}$$

可见 δ 函数描写一个振幅无限大，积分等于 1 的函数. 如图 6-5 所示. 这相当于物理上的功率极强但输出能量等于一个单位的脉冲.

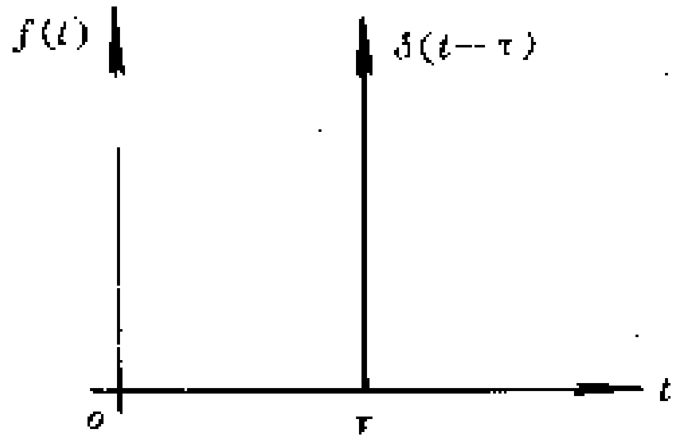


图 6-5 δ 函数

若 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界，且在 $t=T$ 附近连续，则

$$\int_0^{\infty}f(t)\delta(t-T)\mathrm{d}t = f(T) \tag{6.19}$$

因为

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}f(t)\delta(t-T)\mathrm{d}t &= \int_{T-\Delta t}^{T+\Delta t}f(t)\delta(t-T)\mathrm{d}t \\ &= f(T)\int_{T-\delta t}^{T+\Delta t}\delta(t-T) \\ &= f(T)\int_0^{\infty}\delta(t-T)\mathrm{d}t = f(T)\end{aligned}$$

当 $\Delta t\to 0$，则上面的近似式变为等式.

2. δ 函数的拉普拉斯变换　应用式(6.19)有

$$\mathscr{L}[\delta(t-T)] = \int_0^{\infty}\delta(t-T)e^{-st}\mathrm{d}t = e^{-sT} \tag{6.20a}$$

如果 $T=0$，则

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1 \tag{6.20b}$$

这说明位于原点的脉冲所对应的 δ 函数，其拉普拉斯变换等于 1.

3. 脉冲响应　图 6-6 表示当 $t=0$ 时，输入一个脉冲之后，系统输出为 $y(t)$. 这种输出称为**脉冲响应**.

设系统的传递函数为 $G(s)$. 于是

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

这里由于

$$u(t) = \delta(t)$$

考虑式(6.20b),有

$$U(s) = 1$$



图 6-6 脉冲响应

所以

$$Y(s) = G(s) \tag{6.21}$$

设

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}[G(s)] \tag{6.22}$$

由式(6.21),显然有

$$y(t) = g(t) \tag{6.23}$$

结果表明传递函数的拉普拉斯反变换就是系统的脉冲响应.这就是传递函数的物理意义.

§7 方块图

前面指出,一个线性控制系统常常可以用传递函数来描述,在图形上用一个方框来表示,如图 6-1 所示.在图中,左边的箭头表示输入量,右边的箭头表示输出量.当一个控制系统由若干个子系统构成时,每个子系统都有自己相应的传递函数.这时,整个系统的传递函数就由这些子系统的传递函数根据内部的数学关系组合而成.如果将子系统所对应的方块之间按照传递函数之间的数学关系联结起来,这种图形称为控制系统的**方块图**.

应用传递函数研究控制系统时,一般是先画出方块图,然后再作理论上的讨论.方块图也被当作控制系统信息传递情况的一种图形表示.它完全不同于电气工程中的电路图.电路图描绘的是电路的真实结构,也反映能量的传递过程.

在线性控制系统中所用的方块图,其构成单位有下面四种:

(a)信号线　用箭头表示信号的传递方向，在箭头线的下方(或上方)写出表示信号的时间函数或它的拉普拉斯变换式.

(b)引出点　它表示把一个信号分两路取出.因为只取出信号而不取出能量，所以信号量并不减少.

(c)综合点(差值引出点)　它表示把两个信号代数相加.

(d)传递环节　前面提到的子系统，也称为**环节**.环节通常用一个方框来表示，里面写上传递函数.它接受输入信号，并按传递函数把它变成相应的输出信号.

图 7-1 表示了这些构成单位的符号.所传递的信号可用 t 的函数形式也可用 s 的函数形式.

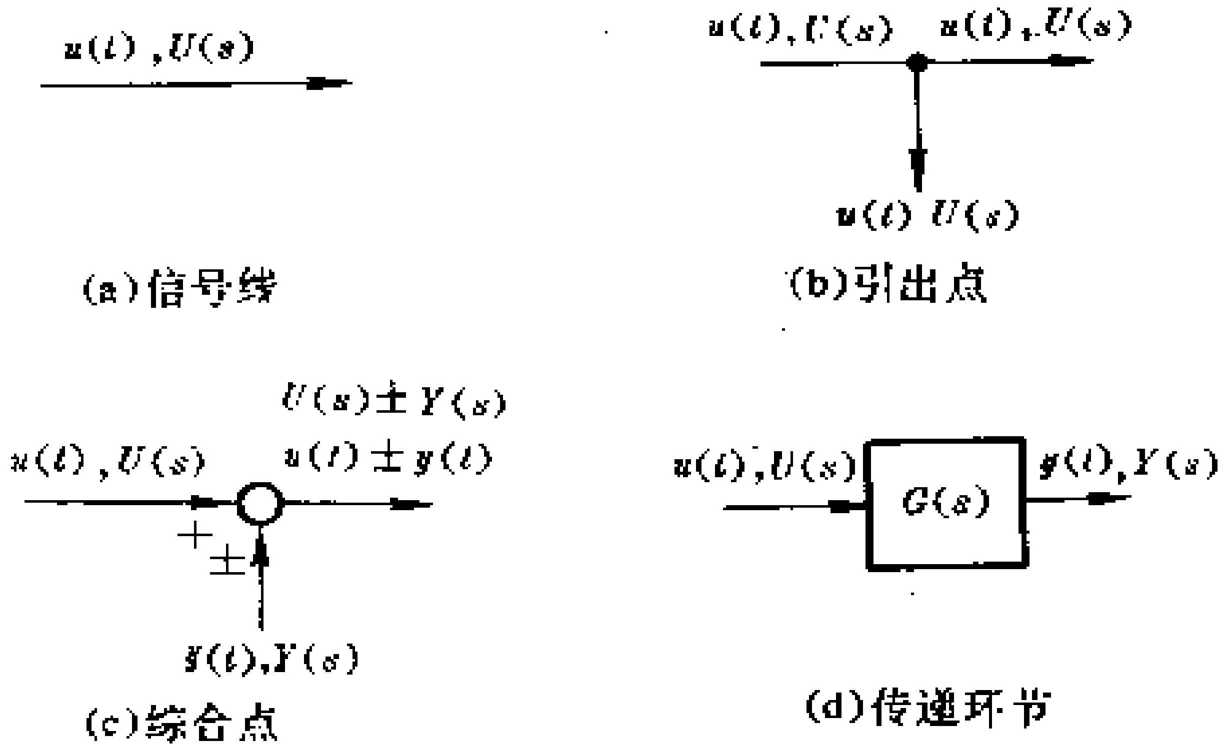


图 7-1　方块图的构成单位

传递函数和方块图主要用于控制系统的频率域分析.这种站在标量控制论立场上对问题的研究，可按照下面三个阶段来进行：

(i)作出控制系统的方块图.

(ii)根据控制的目的进行方块图的变换.

(iii)在理论研究的最后阶段，主要是用一些曲线图来讨论系统的特性.

本节先说明(i)和(ii). 而(iii)放到以后的章节中讲述. 方块图在标量控制论中,是研究反馈控制系统不可缺少的东西. 基于状态方程的向量控制论,采用方块图后也常常变得容易理解.

1. 方块图的作法 以下举例说明:

〔例 1〕用方块图表示图 6-2 所示的 RC 回路

〔解〕电压、电流的方程是

$$e_i(t) - e_0(t) = Ri(t)$$

$$\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t = e_0(t)$$

把这两式进行拉普拉斯变换,令初始值为零,就得到

$$E_i(s) - E_0(s) = RI(s)$$

$$\frac{I(s)}{Cs} = E_0(s)$$

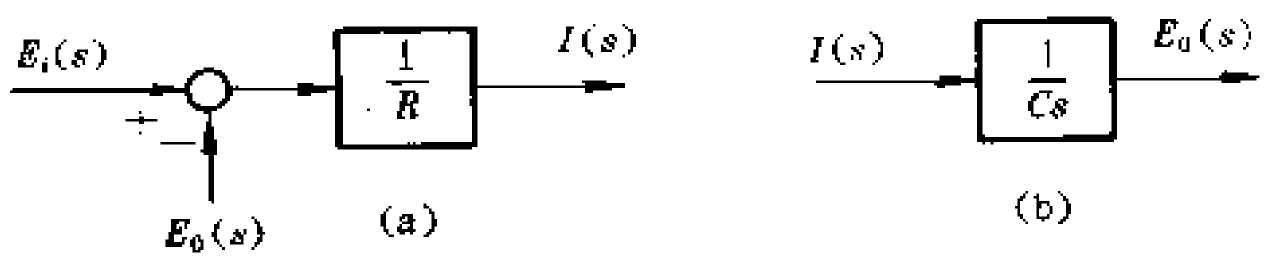


图 7-2 RC 回路方块图的构成次序

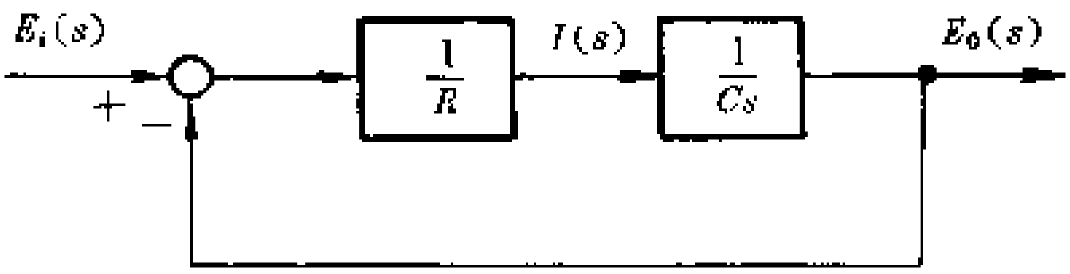


图 7-3 RC 回路的方块图

用方块图表示这两个关系,就得到图 7-2. 把这些方块图组合起来就得到整个回路的方块图,如图 7-3 所示.

〔例 2〕画出图 7-4 所示电路的方块图. 输入为 $e_i(t)$,输出为 $e_3(t)$.

〔解〕图 7-4 所示电路的电压、电流方程为

$$e_i(t) - e_1(t) = R_1 i(t)$$

$$\frac{1}{C_1}\int i_1(t)\mathrm{d}t = e_1(t)$$

$$e_1(t) - e_0(t) = R_2 i_2(t)$$

$$\frac{1}{C_2}\int i_2(t)\mathrm{d}t = e_0(t)$$

$$i_1(t) = i(t) - i_1(t)$$

进行拉普拉斯变换后，可得

$$E_i(s) - E_1(s) = R_1 I(s)$$

$$\frac{I_1(s)}{C_1 s} = E_1(s)$$

$$E_1(s) - E_0(s) = R_2 I_2(s)$$

$$\frac{I_2(s)}{C_2 s} = E_0(s)$$

$$I_1(s) = I(s) - I_2(s)$$

仿照前例，把这些拉普拉斯变换式用方块图表示，就得到图 7-5. 注意到输入和输出信号，并将图 7-5 各方块组合起来，就得到整个电路的方块图如图 7-6 所示.

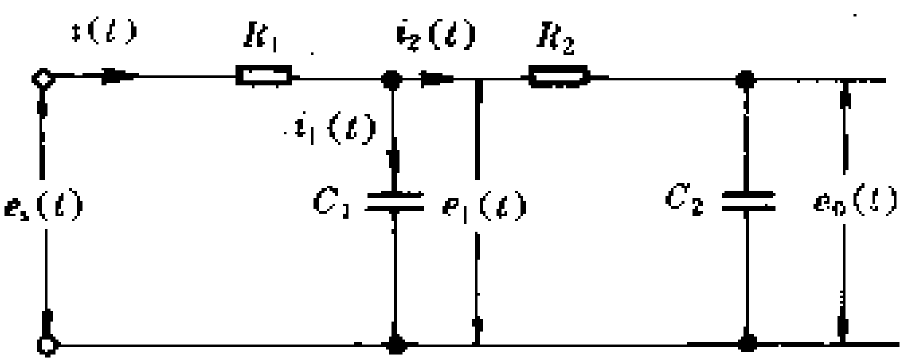


图 7-4 二级阻容电路

2. **方块图的等价变换** 控制系统的方块图作出后，可按照研究的目的进行等价变换以简化方块图，使在理论上便于处理. 有时还有必要分解系统中的构成环节，以便了解系统的内部状态. 下面列出几种等价变换的法则：

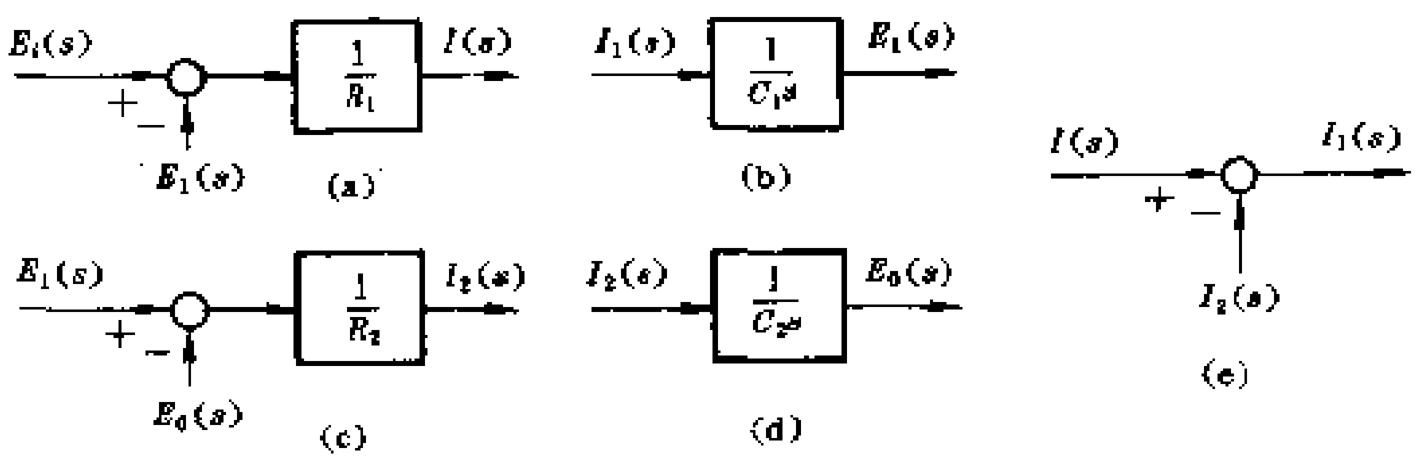


图 7-5　图 7-4 回路方块图的构成次序

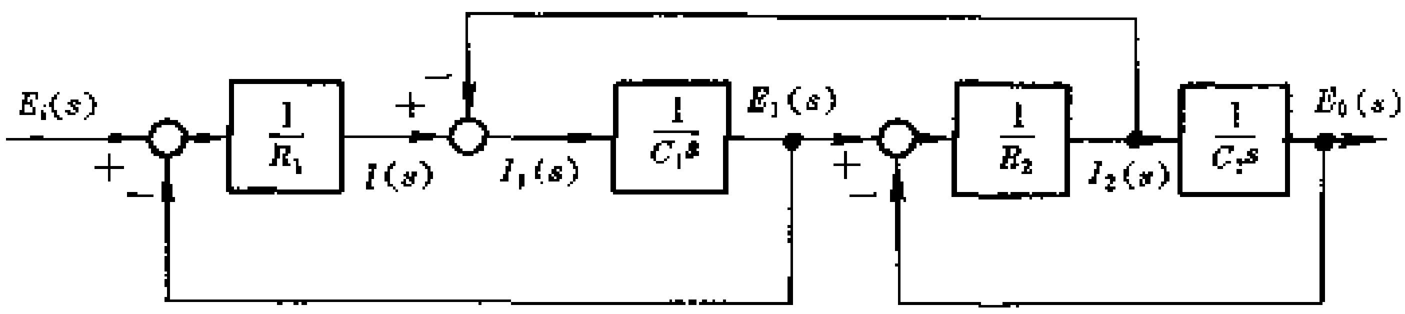


图 7-6　图 7-4 回路的方块图

(1)环节的串联；

(2)环节的并联；

(3)环节的反馈连接；

(4)环节和引出点的交换(Ⅰ)；

(5)环节和引出点的交换(Ⅱ)；

(6)环节和综合点的交换(Ⅰ)；

(7)环节和综合点的交换(Ⅱ)；

(8)引出点的交换；

(9)综合点的相互交换.

环节串并联方块图的等价变换可直接从图 7-7 和 7-8 中直接看出. 下面着重说明反馈连接时传递函数的确定. 如图 7-9 的左图，一方面偏差函数 $E(s)$ 可由 $U(s)$ 和 $Y(s)$ 来确定：

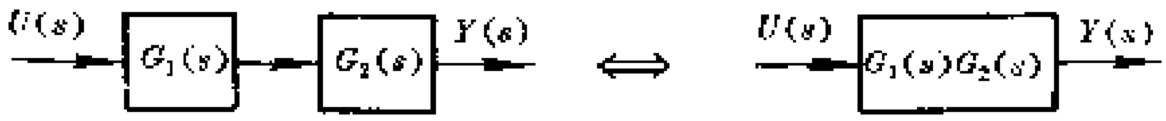


图 7-7　环节的串联

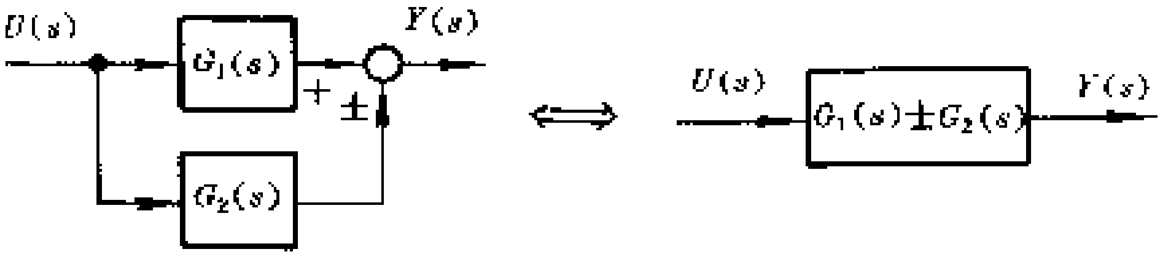


图 7-8　环节的并联

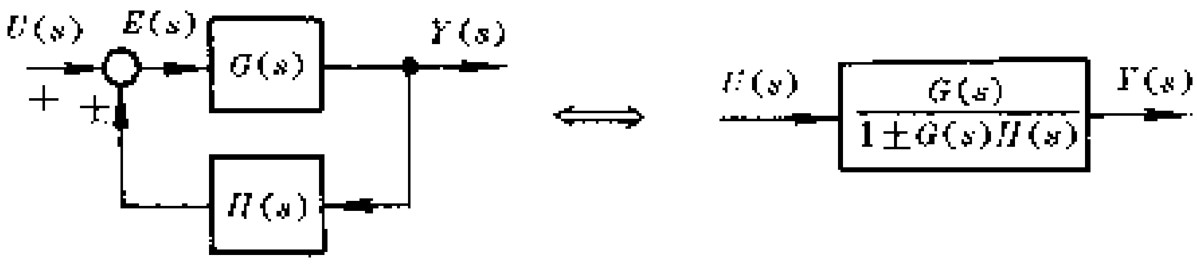


图 7-9　环节的反馈连接

$$E(s)=U(s)\mp H(s)Y(s) \tag{7.1}$$

另一方面，$E(s)$又通过前向通路传递函数$G(s)$变为$Y(s)$：

$$Y(s)=G(s)E(s) \tag{7.2}$$

将式(7.1)代入(7.2)，消去$E(s)$就可求出$Y(s)$和$U(s)$的关系为

$$Y(s)=\frac{G(s)}{1\pm G(s)H(s)}U(s) \tag{7.3}$$

因此，反馈连接的闭环传递函数应当是

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G(s)}{1\pm G(s)H(s)} \tag{7.4}$$

这样就得到了由图 7-9 所示的变换.

至于环节和引出点、综合点的交换，以及引出点和综合点的相

互交换可以直接从图 7-10～7-15 中看出.

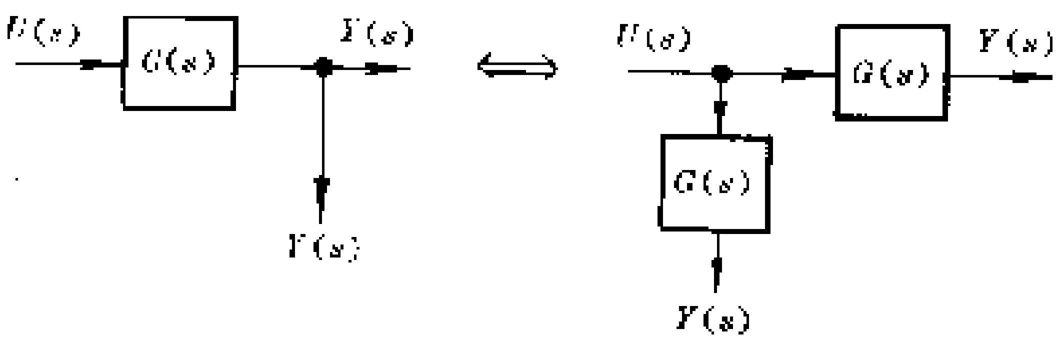


图 7-10　环节和引出点的交换（Ⅰ）

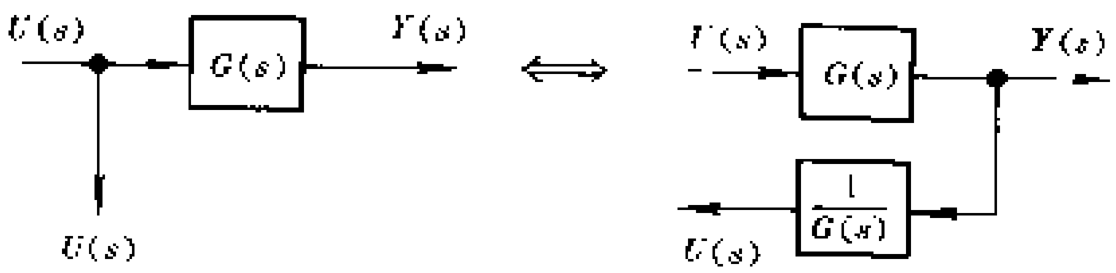


图 7-11　环节和引出点的交换（Ⅱ）

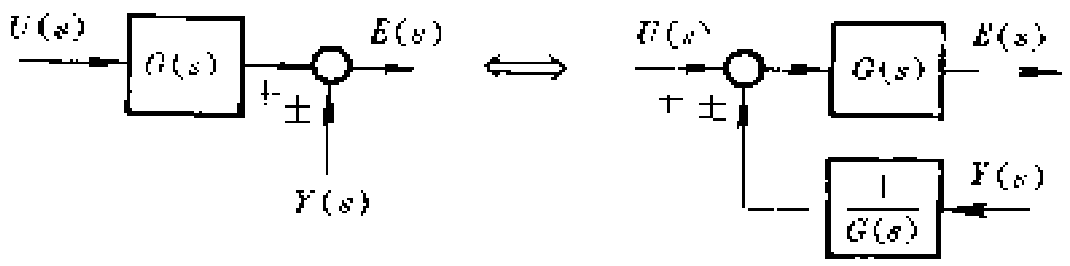


图 7-12　环节和综合点的交换（Ⅰ）

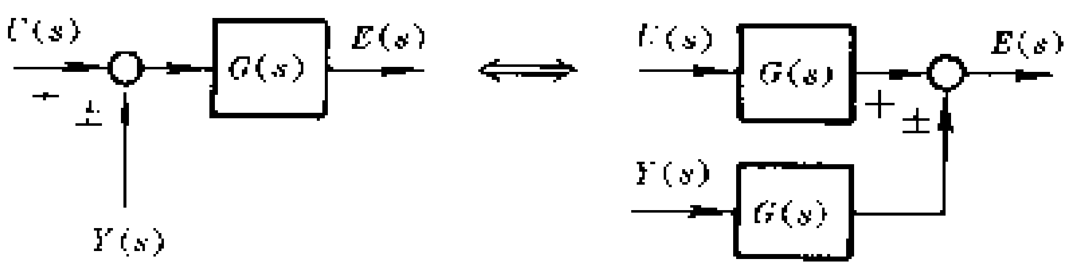


图 7-13　环节和综合点的交换（Ⅱ）

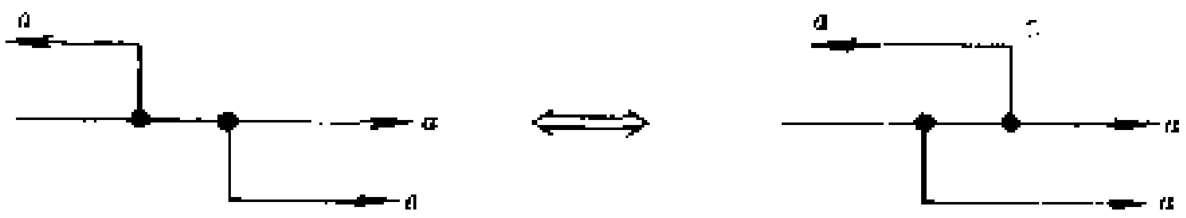


图 7-14 引出点的交换

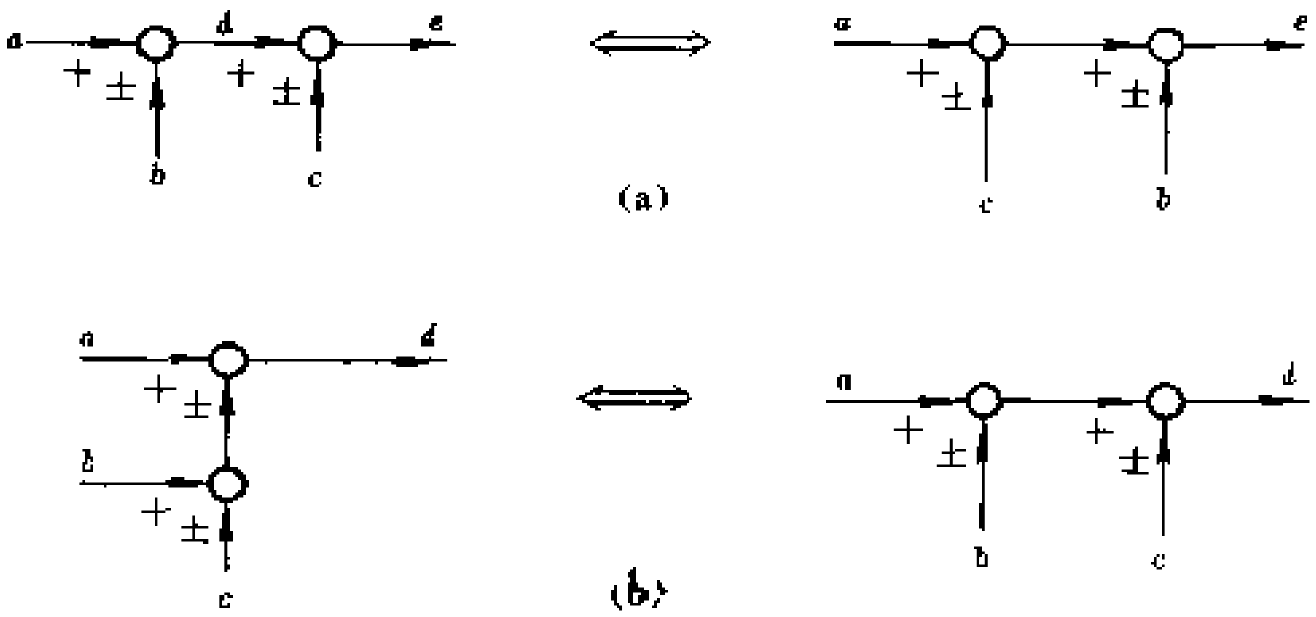
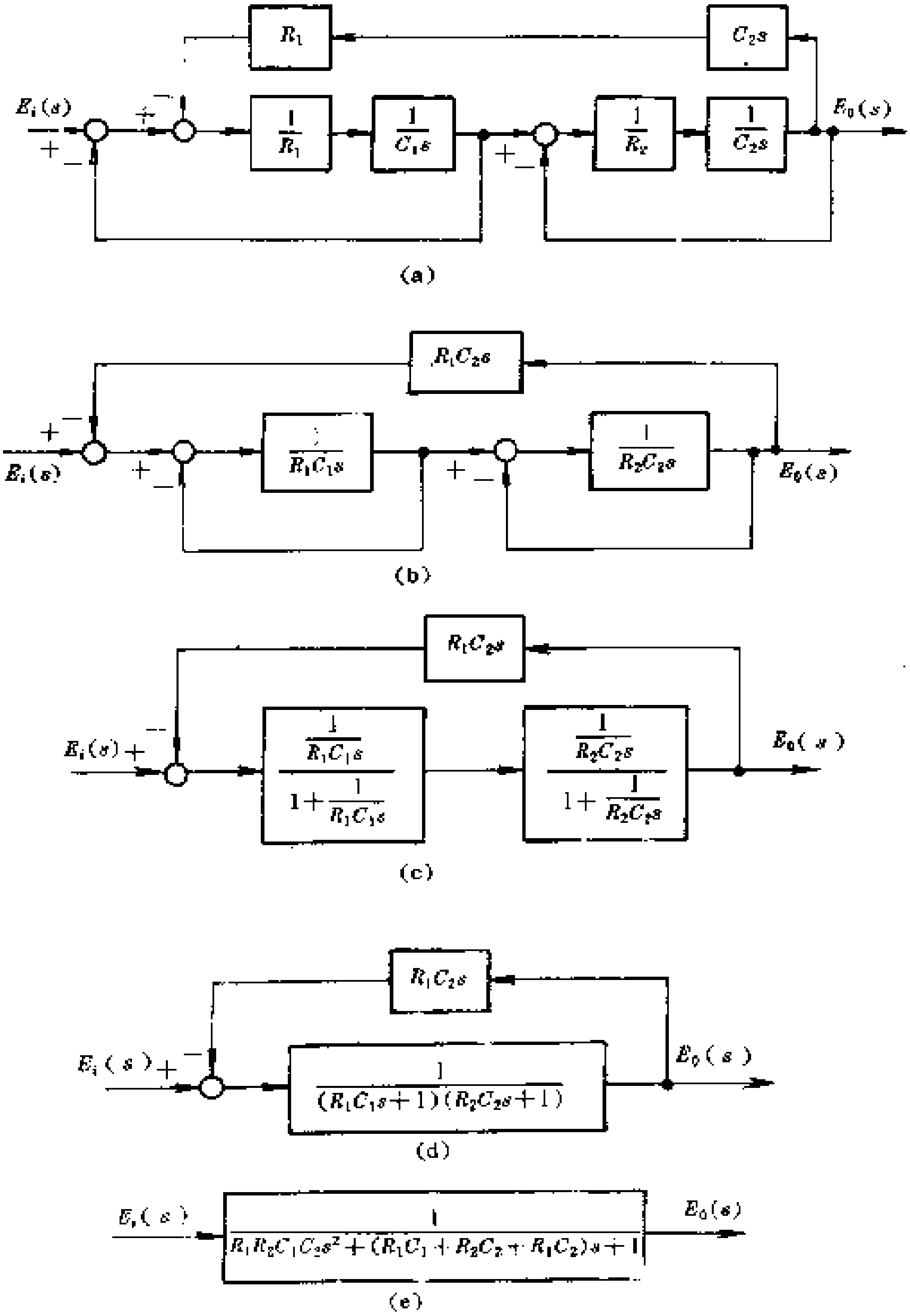


图 7-15 综合点的交换

以下以例题 2 所求得的方块图 7-6 为例说明如何应用前述规则进行方块图简化求得系统整体的传递函数. 简化过程如图 7-16 (a)～(e).

自动控制系统的理论研究中,除这里所述的方块图外,还有所谓信号流动图. 它不仅能表示输入和输出关系,而且还能表示系统的内部状态,但这里不再涉及它的细节.



(a) 根据法则(5)和(6)　(b) 根据法则(1)、(8)、(9)

(c) 根据法则(3)　(d) 根据法则(1)　(e) 根据法则(3)

图 7-16　图 7-4 所示电路的传递函数(简化方块图 7-6)

§8 传递函数系统的实现问题

传递函数的概念在§6是由状态方程在线性定常系统条件下推演出来的. 当时已经指出:状态方程和传递函数之间不存在一一对应关系. 由给定的状态方程可以求得唯一确定的传递函数. 但是,反过来,由给定的传递函数却不能得到唯一确定的状态方程. 一个系统如果是用传递函数描写的,那么,它不注意研究系统的内部状态,而是只从系统的输入和输出的相互关系上去把握的. 它对系统的描写是不完备的. 要想根据传递函数求出系统的状态方程,需要考虑一些附加原则. 从传递函数求状态方程的过程通常称为传递函数系统的实现.

根据§6的讨论,式(6.15)给出了传递函数与状态方程的系数矩阵之间的关系:

$$G(s) = \boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B} + D \tag{6.15}$$

注意到

$$[\boldsymbol{SI} - \boldsymbol{A}] = \frac{[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^*}{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|}$$

式(6.15)可改写成

$$G(s) = \frac{\boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^*\boldsymbol{B}}{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|} + D$$

式中分母是一个 n 阶行列式 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$,将展开为关于 s 的 n 次多项式;分子是矩阵 $[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]$ 的伴随矩阵. 它的每一个元素是由 n 阶行列式 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 的代数余因子构成,因此是关于 s 的最高阶次不超过 $(n-1)$ 次的多项式. 对于单输入单输出的标量系统,分子 $\boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{B}$ 的乘积的最后结果是关于 s 的 $(n-1)$ 次多项式.

这样,$G(s)$ 可以写成一个分式函数:

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \tag{8.1}$$

$A(s)$和 $B(s)$分别是关于 s 的 m 次和 n 次多项式. 根据前面的讨论，如果 $D=0$，则 $m\leqslant n-1$，如果 $D\neq0$，则通分结果使 $m=n$.

现在回过来讨论如何根据给定的传递函数(形如式(8.1)的有理分式函数)求出状态方程的方法. 为简便起见，设 $m<n$，即 $D=0$ 的情形. 下面介绍两种比较典型的方法.

一、降阶法(相变量法)

和前面一样，假定由式(8.1)给定的传递函数有

$$B(s)=s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0 \tag{8.2}$$

$$A(s)=a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_0 \tag{8.3}$$

根据式(6.16)：

$$Y(s)=G(s)U(s)$$

有

$$Y(s)=\frac{A(s)}{B(s)}U(s)=A(s)\frac{U(s)}{B(s)}$$

令

$$X_1(s)=\frac{U(s)}{B(s)} \tag{8.4}$$

于是

$$Y(s)=A(s)X_1(s) \tag{8.5}$$

或

$$Y(s)=(a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_0)X_1(s) \tag{8.6}$$

式(6.4)可改写为

$$(s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0)X_1(s)=U(s) \tag{8.7}$$

下面考虑如何将式(8.7)变为状态方程，式(8.6)变为输出方程.

设

$$\left.\begin{aligned} sX_1(s)&=X_2(s)\\ sX_2(s)&=X_3(s)\\ &\vdots\\ sX_{n-1}(s)&=X_n(s) \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

将上面第一式代入第二式，第二式代入第三式，一直下去，可得：

$$\left.\begin{aligned} X_2(s) &= sX_1(s) \\ X_3(s) &= s^2X_1(s) \\ &\vdots \\ X_n(s) &= s^{n-1}X_1(s) \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

代入式(8.7)，整理后可得

$$sX_n(s) = -[b_0X_1(s) + b_1X_2(s) + \cdots + b_{n-1}X_n(s)] + U(s) \tag{8.10}$$

将式(8.9)代入式(8.6)可得

$$Y(s) = a_0X_1(s) + a_1X_2(s) + \cdots + a_mX_{m+1}(s) \tag{8.11}$$

对式(8.8)和(8.10)求拉普拉斯反变换得：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= -b_0x_1(t) - b_1x_2(t) - \cdots \\ &\quad - b_{n-1}x_n(t) + u(t) \end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

上面应用了 $x(0)=0$. 对式(8.11)求反变换同样可得

$$y(t) = a_0x_1(t) + a_1x_2(t) + \cdots + a_mx_{m+1}(t) \tag{8.13}$$

式(8.12)和式(8.13)分别就是系统的状态方程和输出方程. 当然也可以写成矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u(t) \tag{8.14a}$$

以及

$$y(t)=[a_0\quad a_1\quad\cdots\quad a_m\quad 0\quad\cdots\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_{m+1}(t)\\x_{m+2}(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix} \tag{8.14b}$$

式(8.8)所表示的替换实际上就是微分方程的一种降阶方法.式(8.8)和式(8.4)所作的替换以及式(8.6)和式(8.7)所表示的关系可用方块图来表示.见图 8-1.

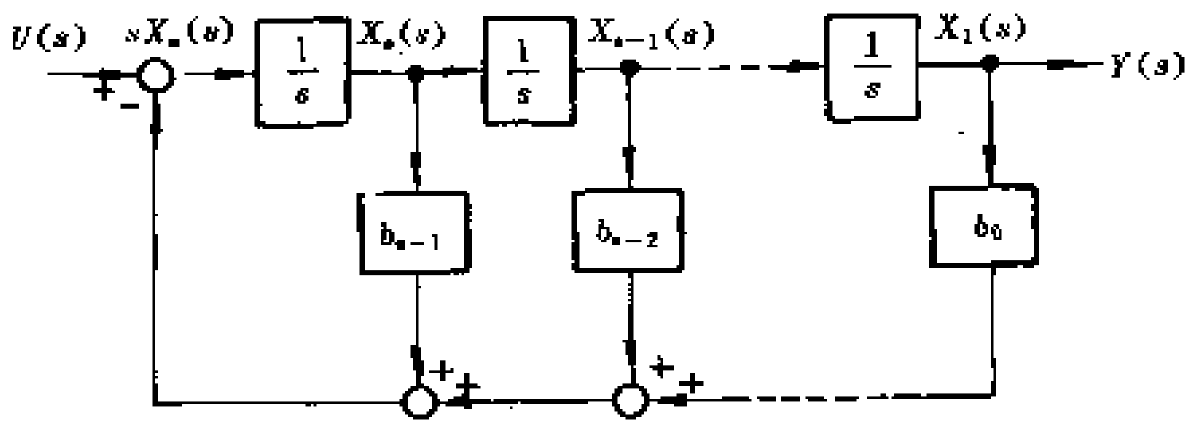


图 8-1 降阶法方块图

二、部分分式展开法(标准变量法)

不失一般性,假定分母多项式含有一个 l 重根,其他为单根,即

$$B(s)=(s-s_1)^l(s-s_{l+1})\cdots(s-s_n) \tag{8.15}$$

则根据§5的讨论，有理分式(8.1)可以按部分分式展开为

$$G(s)=\frac{d_l}{(s-s_1)^l}+\frac{d_{l-1}}{(s-s_1)^{l-1}}+\cdots+\frac{d_1}{s-s_1}$$

$$+\frac{c_{l+1}}{s-s_{l+1}}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n} \tag{8.16}$$

将上式代入式(6.16)得

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{l}\frac{d_i}{(s-s_1)^i}U(s)+\sum_{k=l+1}^{n}\frac{c_k}{s-s_k}U(s)$$

令

$$\left.\begin{aligned}X_1(s)&=\frac{U(s)}{(s-s_1)^l}\\X_2(s)&=\frac{U(s)}{(s-s_1)^{l-1}}\\&\vdots\\X_l(s)&=\frac{U(s)}{s-s_1}\\X_{l+1}(s)&=\frac{U(s)}{s-s_{l+1}}\\&\vdots\\X_n(s)&=\frac{U(s)}{s-s_n}\end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

或

$$\left.\begin{aligned}(s-s_1)X_1(s)&=X_2(s)\\(s-s_1)X_2(s)&=X_3(s)\\&\vdots\\(s-s_1)X_{l-1}(s)&=X_l(s)\\(s-s_1)X_l(s)&=U(s)\\(s-s_{l+1})X_{l+1}(s)&=U(s)\\&\vdots\\(s-s_n)X_n(s)&=U(s)\end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

将式(8.18)代入式(8.17)得

$$Y(s) = d_l X_1(s) + d_{l-1} X_2(s) + \cdots + d_1 X_l(s) \\ + c_{l+1} X_{l+1}(s) + \cdots + c_n X_n(s) \tag{8.20}$$

将式(8.19)求拉普拉斯反变换，可得状态方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= s_1 x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= s_1 x_2(t) + x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{l-1}(t) &= s_1 x_{l-1}(t) + x_l(t) \\ \dot{x}_l(t) &= s_1 x_l(t) + u(t) \\ \dot{x}_{l+1}(t) &= s_{l+1} x_{l+1}(t) + u(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= s_n x_n(t) + u(t) \end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

对式(8.20)求反变换可得输出方程为

$$y(t) = d_l x_1(t) + d_{l-1} x_2(t) + \cdots + d_1 x_l(t) \\ + c_{l+1} x_{l+1}(t) + \cdots + c_n(t) x_n(t) \tag{8.22}$$

式(8.21)和式(8.22)也可以写成矩阵形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{8.23}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{8.24}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s_l & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & s_{l+1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix} \tag{8.25}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\qquad u(t)=u(t) \tag{8.26}$$

$$\boldsymbol{C}=[d_l \quad d_{l-1} \quad d_{l-2} \quad \cdots \quad d_1 \quad c_{l+1} \quad \cdots \quad c_n] \tag{8.27}$$

$$\boldsymbol{D}=0 \tag{8.28}$$

替换关系式(8.19)及式(8.20)可用图 8-2 表示.

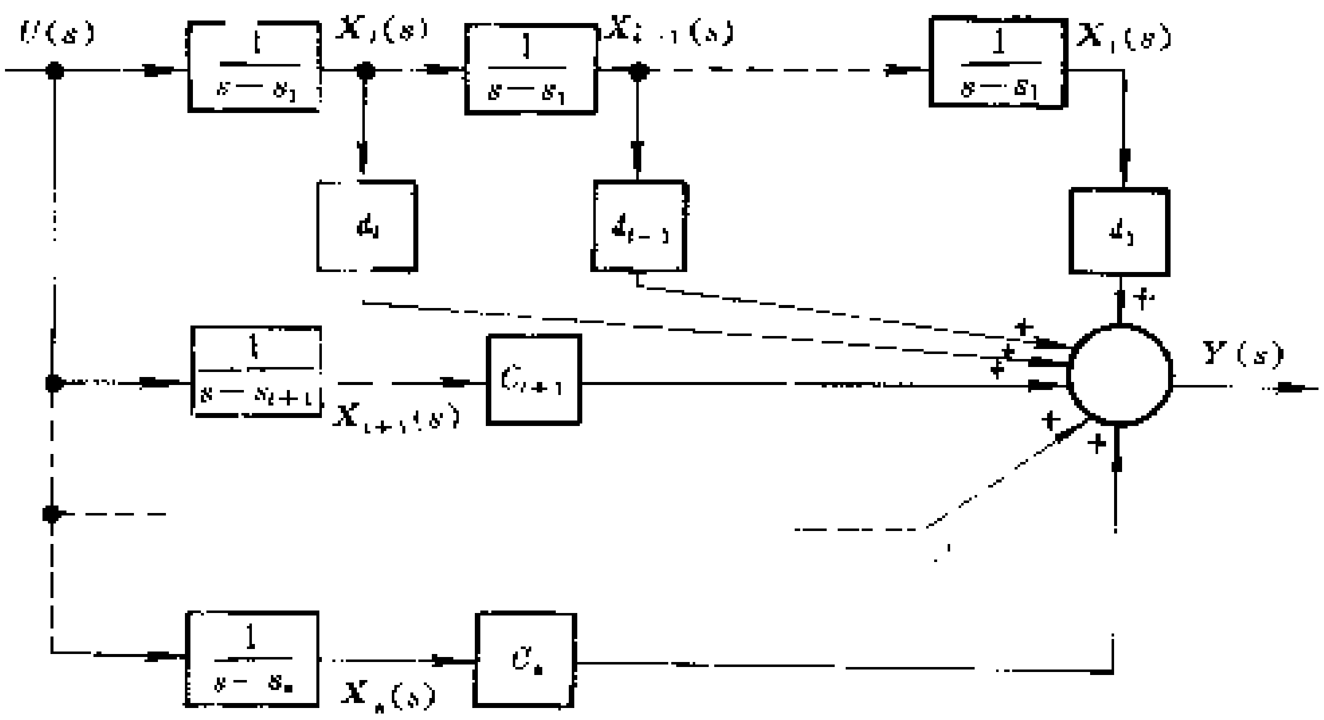


图 8-2 部分分式展开法方块图(Ⅰ)

由于

$$\frac{1}{s-s_k}=\frac{\frac{1}{s}}{1-\frac{s_k}{s}} \tag{8.29}$$

可看成 $1/s$ 与 s_k 反馈联接的结果，于是图 8-2 等价为图 8-3.

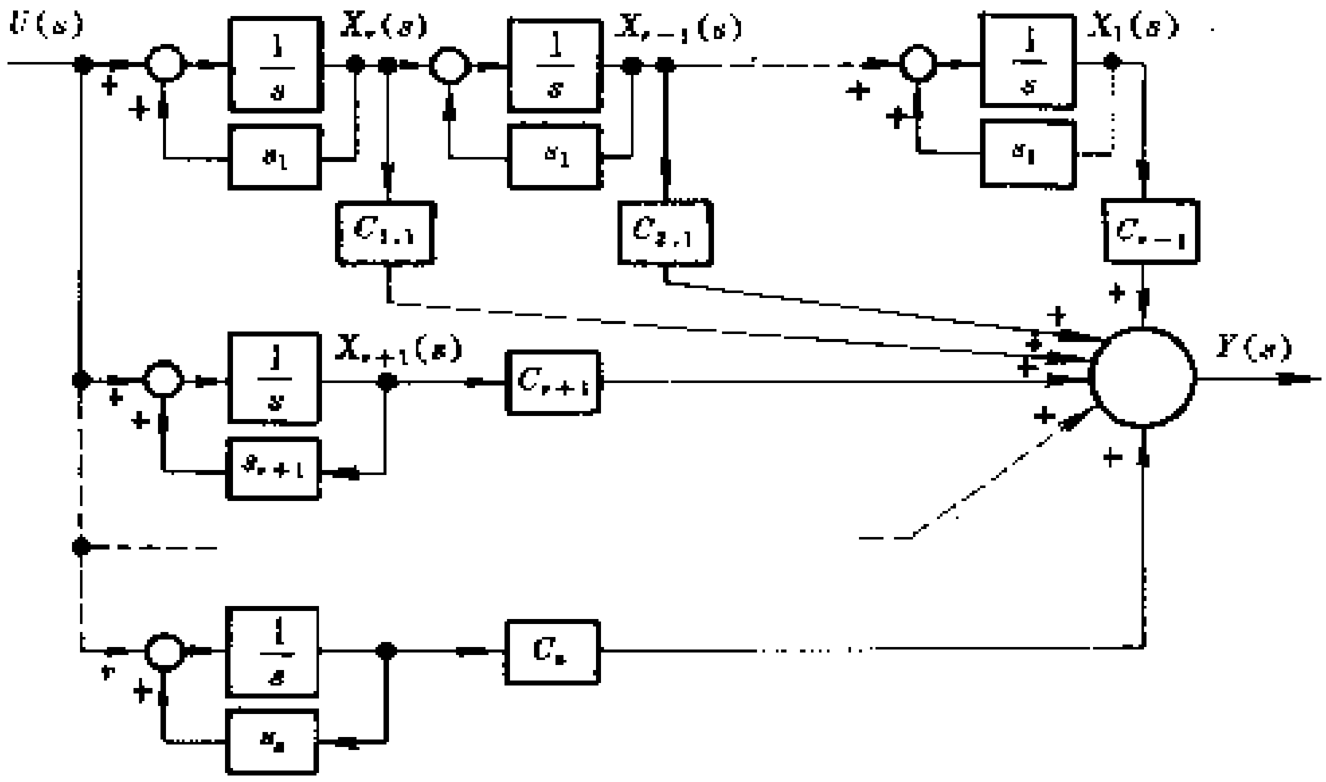


图 8-3　部分分式展开法方块图（Ⅱ）

将这两种求状态方程的方法作一些比较，可以看出，降阶法比较方便，因为不需要求特征值. 而用部分分式展开法求出的系数矩阵是由系统的特征值构成，明确表示了系统的性质. 这样求出的状态变量称为标准变量. 这种表示系统状态的方法称为标准量法. 而前一种方法有人称为相变量法.

§9　状态的可控制性和可观测性

状态变量是系统的内部变量. 要了解系统的状态只能通过输出变量来观测，要控制系统的状态只能通过输入变量的作用. 于是就提出了系统状态是否可观测和可控制的问题.

一、可控制性和可观测性提法

在讨论严格的陈述之前，先提出两个问题：

(1) 已知系统的状态为 $x(t)$，能否选择适当的控制变量 $u(t)$，使系统经过一段时间之后达到期望状态？这是可控制性问题.

(2)对于系统进行一段时间观测之后，能否通过所测得的输出变量 $y(t)$ 知道系统的状态 $x(t)$？这是可观测性问题.

这些问题似乎比较抽象，但反过来就比较容易理解. 例如我们研究图 9-1 所示的情形，输入为 u，输出为 y_1，内部状态为 x_1, x_2. 由于在输出 y_1 中没有包含状态 x_2 的信息，所以系统是不可观测的，而在图 9-2 中，状态 x_2 又完全不受外作用 u 的影响，所以是不可控制的.

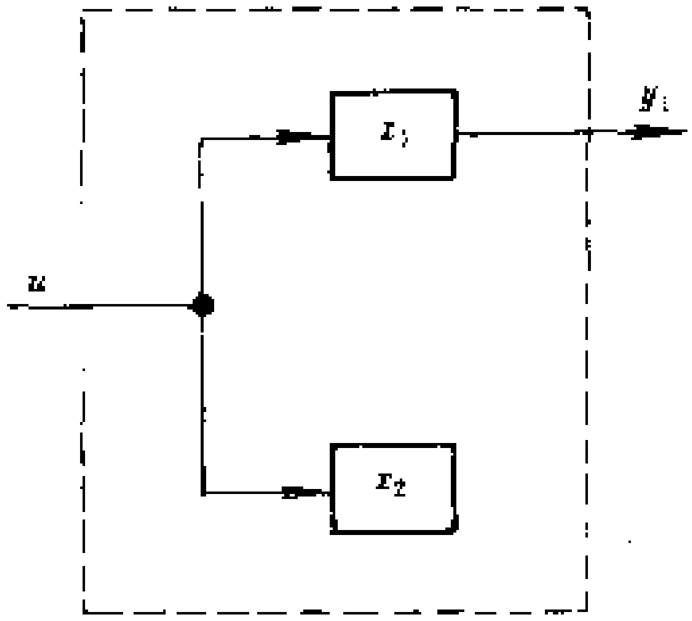


图 9-1　不可观测的系统

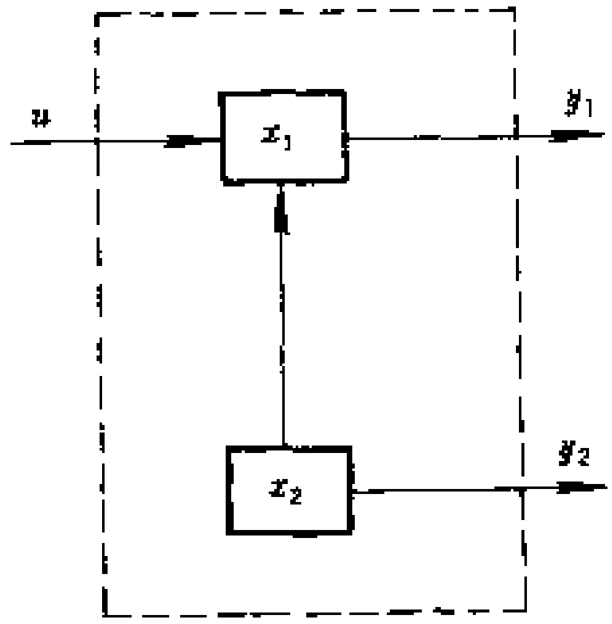


图 9-2　不可控制的系统

下面陈述问题的严格提法.

(1)可控制性：如果已知时刻 t_0 系统的状态为 $x(t_0)$，在有限时间区间 $[t_0, t_f]$ 内可以选择适当的控制变量(输入)使系统于时刻 t_f 达到期望状态 $x(t_f)$，则称系统于时刻 t_0 是可控制的. 如果系统在有定义的任一时刻都是可控制的，则称系统为完全可控制的.

(2)可观测性：如果系统在时刻 t_0 的状态 $x(t_0)$ 可以通过有限时间区间 $[t_0, t_f]$ 对输出变量 $y(t)$ 的观测来决定，则称系统在时刻 t_0 是可观测的. 如果系统在有定义的任意时刻都是可观测的，则称系统是完全可观测的.

以下讨论线性系统可观测性和可控制性条件.

二、线性时变系统状态的可控制性与可观测性

设系统的状态动力学方程为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{9.1}$$

相应的状态转移方程为

$$x(t) = \Phi(t,t_0)[x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau] \tag{9.2}$$

假定 $t=t_f$ 时系统的期望状态为 $x(t_f)$，则上式变为

$$\int_{t_0}^{t_f}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = \Phi(t_0,t_f)x(t_f) - x(t_0) \tag{9.3}$$

现在讨论系统在时刻 t_0 的可控制性. 设 $x(t_0)$ 是已知的，$x(t_f)$ 为给定的，如果通过积分方程(9.3)可以确定 $u(t)$，则根据定义可使系统于时刻 t_0 可控制.

式(9.3)左边相应于这样一种运算过程：矩阵 $B(t)$，$\Phi(t_0,t)$ 相继作用于 l 维向量 $u(t)$，然后在时间间隔 $[t_0,t_f]$ 对 t 进行积分，结果得到一个 n 维向量. 假定这一系列运算可以和一个 $(n\times l)$ 矩阵 $F(t_0,t_f,t)$ 作用于 $u(t)$ 等价，则方程(9.3)可以写成

$$F(t_0,t_f,t)u(t) = \Phi(t_0,t_f)x(t_f) - x(t_0) \tag{9.4}$$

假如积分方程(9.3)有解，就意味着这个解 $u(t)$ 可能是 $F(t_0,t_f,t)$ 的逆运算 $F^{-1}(t_0,t_f,t)$ 作用于方程(9.4)右边的结果，即

$$u(t) = F^{-1}(t_0,t_f,t)[\Phi(t_0,t_f)x(t_f) - x(t_0)] \tag{9.5}$$

克莱姆提出 $F^{-1}(t_0,t_f,t)$ 可以用下面一组矩阵的乘积来表示：

$$F^{-1}(t_0,t_f,t) = B^T(t)\Phi^T(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_f) \tag{9.6}$$

式中 $W^{-1}(t_0,t_f)$ 假定是 $(n\times n)$ 待定矩阵 $W(t_0,t_f)$ 的逆矩阵. 将式(9.6)代入式(9.5)得

$$u(t) = B^T(t)\Phi^T(t,t_0)W^{-1}(t_0,t_f)[\Phi(t_0,t_f)x(t_f) - x(t_0)] \tag{9.7}$$

要使式(9.7)成立，那么它应当满足积分方程(9.3). 将式(9.7)代入式(9.3)，得

$$\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{B}^T(\tau)\boldsymbol{\Phi}^T(t_0,\tau)\boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_f)$$

$$\cdot[\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_f)\boldsymbol{x}(t_f)-\boldsymbol{x}(t_0)]\mathrm{d}\tau$$

$$=\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_f)\boldsymbol{x}(t_f)-\boldsymbol{x}(t_0) \tag{9.8}$$

注意到上式左边 $\boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_f)[\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_f)\boldsymbol{x}(t_f)-\boldsymbol{x}(t_0)]$ 与积分变量 τ 无关，可提出积分号之外，于是式(9.8)可写成

$$\left\{\left[\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{B}^T(\tau)\boldsymbol{\Phi}^T(t_0,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_f)-\boldsymbol{I}\right\}$$

$$\cdot[\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_f)\boldsymbol{x}(t_f)-\boldsymbol{x}(t_0)]=0 \tag{9.9}$$

由于 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 和 $\boldsymbol{x}(t_f)$ 是任意给定的，$\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_f)$ 是非奇异的，上式左边最后一个因子 $[\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_f)\boldsymbol{x}(t_f)-\boldsymbol{x}(t_0)]$ 可以是任意不为零的向量．于是式(9.9)成立的充要条件是

$$\left[\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{B}^T(\tau)\boldsymbol{\Phi}^T(t_0,\tau)\mathrm{d}\tau\right]\boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_f)=\boldsymbol{I} \tag{9.10}$$

而要使上式成立，当且仅当积分

$$\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{B}^T(\tau)\boldsymbol{\Phi}^T(t_0,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9.11}$$

是 $\boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_f)$ 的逆矩阵．于是记

$$\boldsymbol{W}(t_0,t_f)=\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{B}^T(\tau)\boldsymbol{\Phi}^T(t_0,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9.12}$$

事实上，对于给定的系统，$\boldsymbol{B}(t)$、$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 给定，因而 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$ 存在．而要使由式(9.7)所表示的 $\boldsymbol{u}(t)$ 存在，并且是方程(9.3)的解的充要条件是逆矩阵 $\boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_f)$ 存在，它等价于要求矩阵 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$ 是非奇异的．这时，所讨论的充要条件可以归结为相应的矩阵行列式不为零，即

$$|\boldsymbol{W}(t_0,t_f)|=\left|\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{B}^T(\tau)\boldsymbol{\Phi}^T(t_0,\tau)\mathrm{d}\tau\right|\neq 0 \tag{9.13}$$

或

$$\mathrm{rank}\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{B}^T(\tau)\boldsymbol{\Phi}^T(t_0,\tau)\mathrm{d}\tau = n \tag{9.14}$$

只要矩阵 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$的初始时刻 t_0 可以取遍区间$[t_0,t_f]$中的所有时刻，并且都是非奇异的，那么系统在整个区间$[t_0,t_f]$上是完全可控制的.

式(9.13)或式(9.14)是线性时变系统可控制的充要条件.

下面讨论系统的可观测性.

由于问题只涉及状态变量 $\boldsymbol{x}(t)$与输出变量 $\boldsymbol{y}(t)$之间的关系，为简便起见，设 $\boldsymbol{u}(t)=0$. 于是系统的控制方程可以写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{9.15}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{9.16}$$

由方程(9.15)可求得状态转移方程为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{9.17}$$

将上式代入式(9.16)，得

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{9.18}$$

两边乘以 $\boldsymbol{\Phi}^T(t,t_0)C^T(t)$，并对 t 积分，得

$$\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}^T(\tau,t_0)\boldsymbol{C}^T(\tau)\boldsymbol{y}(\tau)\mathrm{d}\tau = \left[\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}^T(\tau,t_0)\boldsymbol{C}^T(\tau)\boldsymbol{C}(\tau)\boldsymbol{\Phi}(\tau,t_0)\mathrm{d}\tau\right]\boldsymbol{x}(t_0) \tag{9.19}$$

设

$$\boldsymbol{V}(t_f,t_0) = \int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}^T(\tau,t_0)\boldsymbol{C}^T(\tau)\boldsymbol{C}(\tau)\boldsymbol{\Phi}(\tau,t_0)\mathrm{d}\tau \tag{9.20}$$

于是式(9.19)变为

$$\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}^T(\tau,t_0)\boldsymbol{C}^T(\tau)\boldsymbol{y}(\tau)\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{V}(t_f,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{9.21}$$

根据可观测性的提法，系统于时刻 t_0 可观测被归结为通过方程(9.21)解出 $\boldsymbol{x}(t_0)$. 可以看出 $\boldsymbol{x}(t_0)$可解的充要条件是系数矩阵

$V(t_f,t_0)$存在逆矩阵. 这同样可以表示为相应的矩阵行列式不为零:

$$\left|\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}^T(\tau,t_0)\boldsymbol{C}^T(\tau)\boldsymbol{C}(\tau)\boldsymbol{\Phi}(\tau,t_0)\mathrm{d}\tau\right| \neq 0 \qquad (9.22)$$

或

$$\mathrm{rank}\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}^T(\tau,t_0)\boldsymbol{C}^T(\tau)\boldsymbol{C}(\tau)\boldsymbol{\Phi}(\tau,t_0)\mathrm{d}\tau = n \qquad (9.23)$$

只要条件(9.22)或(9.23)成立,时刻 t_0 的状态向量就可通过 $\boldsymbol{y}(t)$ 求出:

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{V}^{-1}(t_f,t_0)\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\Phi}^T(\tau,t_0)\boldsymbol{C}^T(\tau)\boldsymbol{y}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (9.24)$$

式中 $\boldsymbol{V}^{-1}(t_f,t_0)$是由式(9.20)规定的矩阵的逆.

如果式(9.22)或(9.23)中的初始时刻可以取遍$[t_0,t_f]$的所有时刻,则系统在时间区间$[t_0,t_f]$中完全可观测.

三、线性定常系统的可控制性和可观测性

对于定常系统,由于所有系数矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都与时间无关,其可控制性与可观测性条件可以进一步简化.

设 $t_0=0$,定常系统的转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t,0) = \boldsymbol{\Phi}(t) = e^{At} \qquad (9.25)$$

且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不含时间,于是式(9.12)变为

$$\boldsymbol{W}(t_f) = \boldsymbol{W}(0,t_1) = \int_0^{t_f} e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T e^{-A^T\tau}\mathrm{d}\tau \qquad (9.26)$$

定常系统可控制性条件可以表示为

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{W}(t_f) = \mathrm{rank}\int_0^{t_f} e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T e^{-A^T\tau}\mathrm{d}\tau = n \qquad (9.27)$$

注意到凯莱—哈密顿定理* ·

* 蒋尔雄:《线性代数》(第十章),人民教育出版社,1978年.

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k \tag{9.28}$$

于是

$$\Phi(t,0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k \tag{9.29}$$

同理

$$\Phi(0,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha'_k(t) A^k \tag{9.30}$$

式中 $\alpha'(t) = \alpha_k(-t)$.

先讨论定常系统可控制性.将式(9.30)代入式(9.26),得

$$\boldsymbol{W}(t_f) = \int_0^{t_f} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\tau) \boldsymbol{A}^i \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha'_j(\tau)(\boldsymbol{A}^T)^j \mathrm{d}\tau \tag{9.31}$$

注意到每个 $\alpha'_i(\tau)$ 都是标量,并且 $\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{A}^T)^j = (\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{B})^T$,式(9.31)变为

$$\boldsymbol{W}(t_f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}\left[\int_0^{t_f} \alpha'_i(t)\alpha'_j(\tau)\mathrm{d}\tau\right](\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{B})^T \tag{9.32}$$

令

$$\mu_{ij} = \int_0^{t_f} \alpha'_i(\tau)\alpha'_j(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9.33}$$

于是式(9.32)变为

$$\boldsymbol{W}(t_f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}\mu_{ij}(\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{B})^T \tag{9.34}$$

设以 μ_{ij}的$(n\times n)$个量为元素构成的矩阵为

$$\boldsymbol{M} = [\mu_{ij}] \tag{9.35}$$

并且 $B, AB, \cdots, A^{n-1}B$ 组合成$(n\times nl)$矩阵 G:

$$\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{AB} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] \tag{9.36}$$

式(9.34)从而可以写成

$$\boldsymbol{W}(t_f) = \boldsymbol{GMG}^T \tag{9.37}$$

式(9.12)表明,线性系统可控制的充要条件是

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{W}(t_f) = n \tag{9.38}$$

而式(9.37)又表明，对于定常系统，$\boldsymbol{W}(t_f)$可以看作$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{G}^T$的乘积，因此

$$\text{rank}\boldsymbol{G} = n \tag{9.39}$$

式(9.38)成立的必要条件. 如果$\boldsymbol{M}$是可逆的，那么这个条件也是充分的. 事实上，这不难用反证法作出证明*.

因此，线性定常系统可控制性的充要条件可以写成

$$\text{rank}[\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{AB} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] = n \tag{9.40}$$

如果系统的输入$\boldsymbol{u}(t)$是标量($l=1$)，则$\boldsymbol{B}$为n维向量，$\boldsymbol{G}$为($n\times n$)矩阵，这时可控制性条件，式(9.40)可写成行列式

$$|[\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{AB} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]| \neq 0 \tag{9.41}$$

将类似讨论用于式(9.23)，可以引出与$\boldsymbol{G}$相似的矩阵$\boldsymbol{H}$：

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{9.42}$$

或

$$\boldsymbol{H}^T = [\boldsymbol{C}^T \vdots \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \vdots \cdots \vdots (\boldsymbol{A}^T)^{n-1}\boldsymbol{C}^T] \tag{9.43}$$

这时，定常系统可观测性的充要条件被归结为下述三种等价提法：

(1)矩阵$\boldsymbol{H}$的n个列向量之间线性无关；

(2)矩阵$\boldsymbol{H}$的秩为n，或

$$\text{rank}[\boldsymbol{C}^T \vdots \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \vdots \cdots \vdots (\boldsymbol{A}^T)^{n-1}\boldsymbol{C}^T] = n \tag{9.44}$$

(3)当$\boldsymbol{u}(t)$是标量的特殊情形下，上式还可简单地表示为

$$|[\boldsymbol{C}^T \vdots \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \vdots \cdots \vdots (\boldsymbol{A}^T)^{n-1}\boldsymbol{C}^T]| \neq 0 \tag{9.45}$$

由于矩阵$\boldsymbol{G}$和$\boldsymbol{H}$都与时间t无关，所以对于定常系统，只要

---

* 华东师范大学：《现代控制理论引论》，第二章，上海科学技术出版社，1984年.

某个时刻是可控制的或可观测的，则是完全可控制的或可观测的.

〔例 1〕设

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

试判断系统的可观测性与可控制性.

〔解〕根据题设，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = [1 \quad 0]$$

而

$$[\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

它的行列式

$$|\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{AB}| = -1 \neq 0$$

所以矩阵〔B:AB〕的秩为 2，系统完全可控制.

因

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \cdots \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

是 2×2 矩阵，其行列式

$$\begin{vmatrix} C \\ \cdots \\ CA \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

所以相应矩阵的秩为 2，系统完全可观测.

习　　题

1. 求出图 10-1 所示电路的状态方程和输出方程.

2. 求出图 10-2 所示电路的状态方程和输出方程.

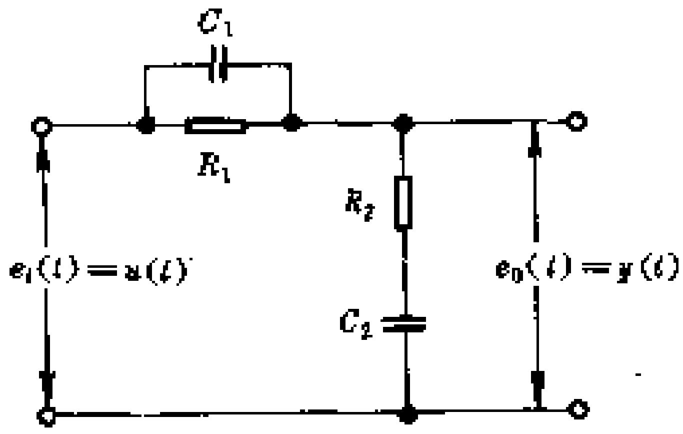


图 10-1　阻容电路

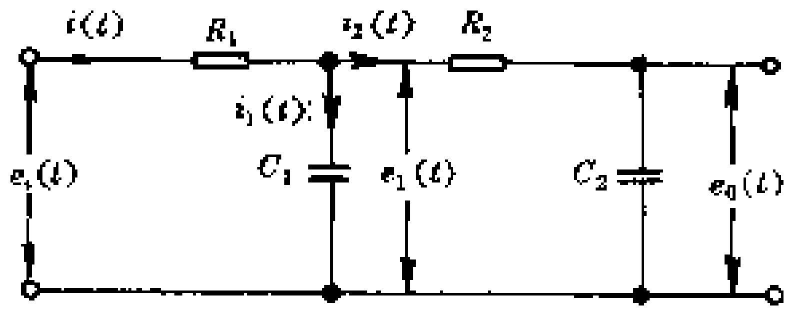


图 10-2　阻容电路

3. 求出下面各式的拉普拉斯反变换.

(1)　$F(s)=\dfrac{5s+1}{s^2+6s+3}$

(2)　$F(s)=\dfrac{-4}{(s+1)^2(s+3)}$

(3)　$F(s)=\dfrac{s^2+5s+12}{(s+2)(s^2+2s+2)}$

(4)　$F(s)=\dfrac{3e^{-s}}{2s+1}$

4. 对于用状态方程和输出方程

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+[0]\boldsymbol{u}(t)$$

所表示的常系数系统，试求出其转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$和单位阶跃输入下的输出响应 $\boldsymbol{y}(t)$.

5. 把由下式所示的变系数微分方程描述的系统用 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$ 的形式来表示：

$$t^2 \frac{d^3y(t)}{dt^3} + \cos t \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + (\sin t)y(t)$$
$$= t^3 \frac{d^2u(t)}{dt^2} + (\cos t)\frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

6. 对下列各式所示的常系数系统，求出其转移矩阵.

(1) $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = 0$

(2) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 0$

(3) $\dddot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 4y(t) = 0$

7. 试求出时变系统 $\dot{x}(t) = -tx(t)$ 的转移矩阵.

8. 对常系数系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

(1)求出其转移矩阵；

(2)求出 $x(0)=x_0, u(t)=1(t)$时的响应.

9. 求出图 10-3 所示电路的传递函数，并画出方块图

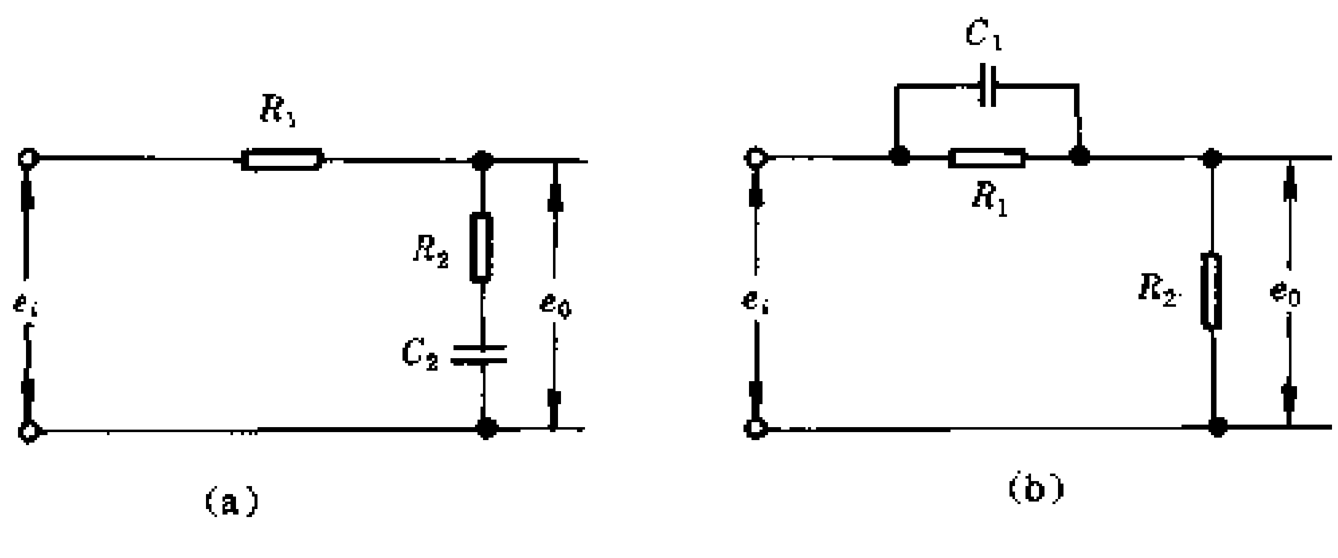


图 10-3 阻容电路

10. 求出图 10-1 所示电路的传递函数及方块图.

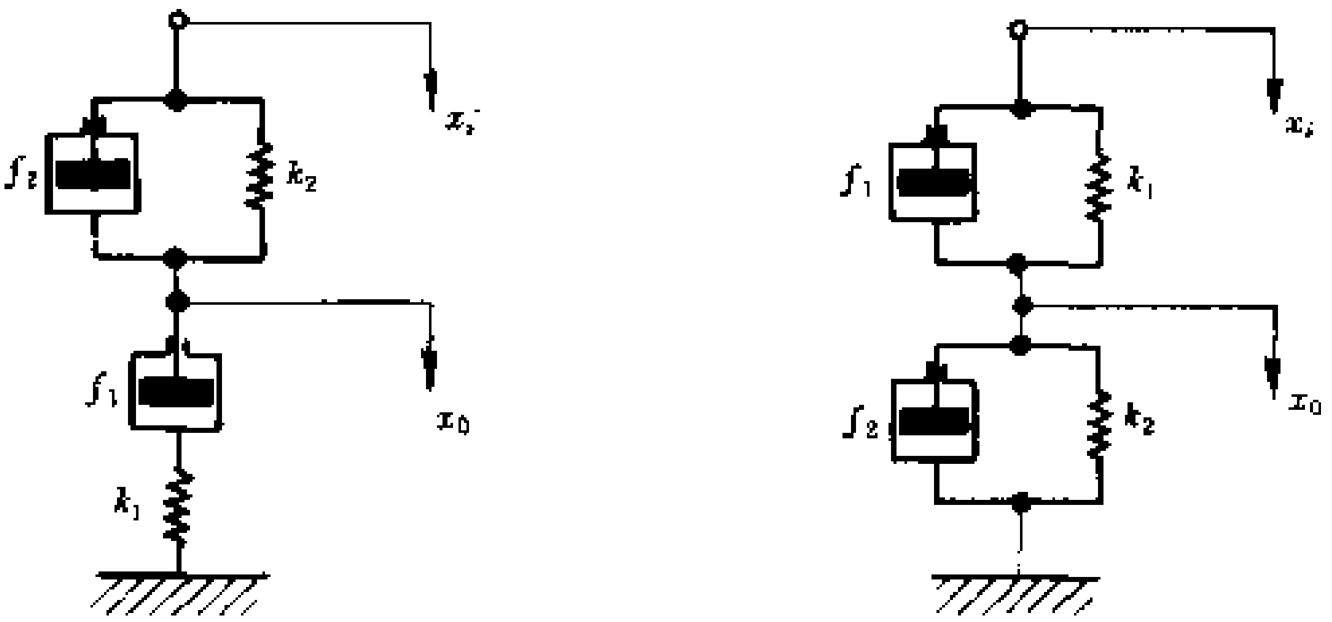
11. 传递函数为

$$G(s)=\frac{2s^3+3s^2+s+2}{s^3+6s^2+11s-6}$$

的系统，试用标准变量和相变量表示其状态方程和输出方程，并画出两种情况下的系统方块图.

12. 根据§6例题4所得传递函数 $G(s)$ 求出相应的状态方程和输出方程.

13. 求出图10-4所示机械系统的传递函数：$G(s)=X_0(s)/X_i(s)$，并画出方块图.



(a)　　　　　　(b)

图 10-4　液压系统

14. 试判断第8题给出系统的可控制性与可观测性.

15. 设

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

试判断系统的可观测性和可控制性.

第二章　反馈控制理论

本章主要介绍单输入单输出的线性控制系统通过反馈实现定值调节或者变化不很剧烈的信号的自动跟踪过程，就是通常称为经典控制理论的那一部分. 主要内容有过渡响应、稳态伺服特性、频率响应和稳定性等，并简要讨论反馈控制系统特性设计的概念. 由于篇幅所限，略去了工程设计上仍然比较有用的作图法，比如根轨迹法等. 读者可以根据自己需要参考其他有关书籍.

§1　线性系统的过渡响应

一个线性定常系统，常常可以看成由若干简单的子系统构成. 这一节着重介绍两类最简单的系统即一阶惯性系统和二阶振荡系统的动态特性，并在此基础上讨论高阶系统简化的初步概念.

一、一阶惯性系统的过渡响应

1. **物理实体**　第一章§6举例介绍了一个阻容电路的充放电过程和具有一定热容量物体的加热过程都可用形如

$$G(s)=\frac{c}{Ts+1} \tag{1.1}$$

的传递函数来描写. 与这类传递函数对应的微分方程是一阶线性常微分方程：

$$\dot{y}+\frac{1}{T}y=\frac{c}{T}u(t) \tag{1.2}$$

式中，时间常数 T 反映由于电容或热容存在所引起的时间滞后. 因此，式(1.1)所描写的系统称为**一阶惯性系统**. 为简化讨论，通常

将

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \tag{1.3}$$

作为一阶惯性系统传递函数的规范形式. 时间常数 T 是一阶系统的主要特征参数. 图 1-1 是一阶惯性系统的方块图. 它可以看成积分环节的单位反馈所构成.

下面分别讨论系统在不同输入下的过渡响应, 并研究特征参数 T 的意义.

2. 一阶惯性系统的单位阶跃响应 对于单位阶跃响应: $u(t) = 1(t)$, 有

$$U(s) = \frac{1}{s} \tag{1.4}$$

所以

$$Y(s) = \frac{1}{Ts + 1}\frac{1}{s} \tag{1.5}$$

将上式展开,

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1}$$

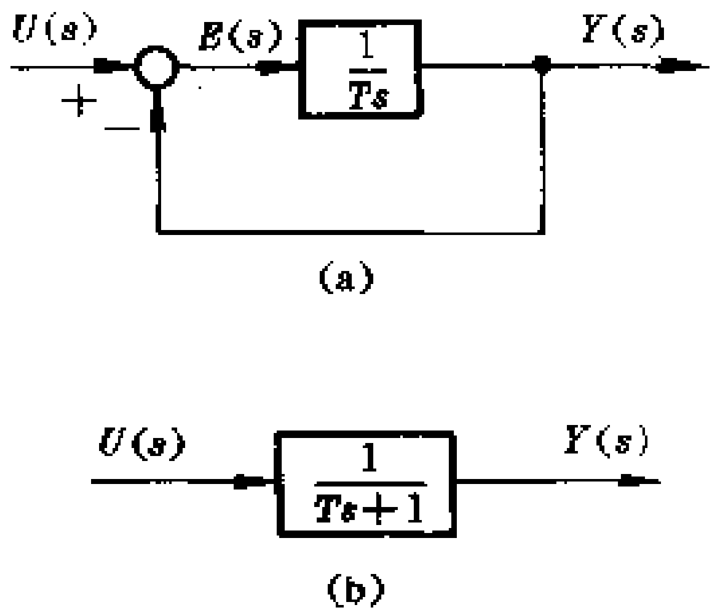


图 1-1 (*a*)一阶系统方块图;
(*b*)简化方块图

然后求其拉普拉斯反变换得

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0) \tag{1.6}$$

这就是一阶惯性系统的过渡响应. 可以看出, 当 $t=0$ 时, 输出量 $y(t)$ 为零; 当 $t\to\infty$ 时则趋于 1. 时间常数 T 是这样一个指数函数的重要特征. 因为当 $t=T$ 时,

$$y(T) = 1 - e = 0.632$$

当 $t=0$ 时, 切线的斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right|_{t=0} = \frac{1}{T} \tag{1.7}$$

如果系统保持这样的初始响应速率不变, 则当 $t=T$ 时, 输出量就

能达到稳态值. 从式(1.6)可以看出,响应曲线的斜率是单调下降的:从 $t=0$ 的 $1/T$ 下降到 $t=\infty$ 时的零值. 图 1-2 表示方程(1.6)所代表的指数曲线. 它表明,当 $t=T$,输出上升 63.2%;当 $t=2T$,上升 86.5%;当 $t\geq 4T$,响应曲线保持在稳态值的 2% 允许误差范围之内. 从数学观点看,仅当 $t=\infty$,才能达到稳态值. 但考虑实际测量精度,工业上一般把响应曲线达到稳态值的 2% 允许误差范围之内所需的时间,或 $4T$,来作为评价响应时间的标准. 当然这个标准是指一般而言,不同的问题可以不一样.

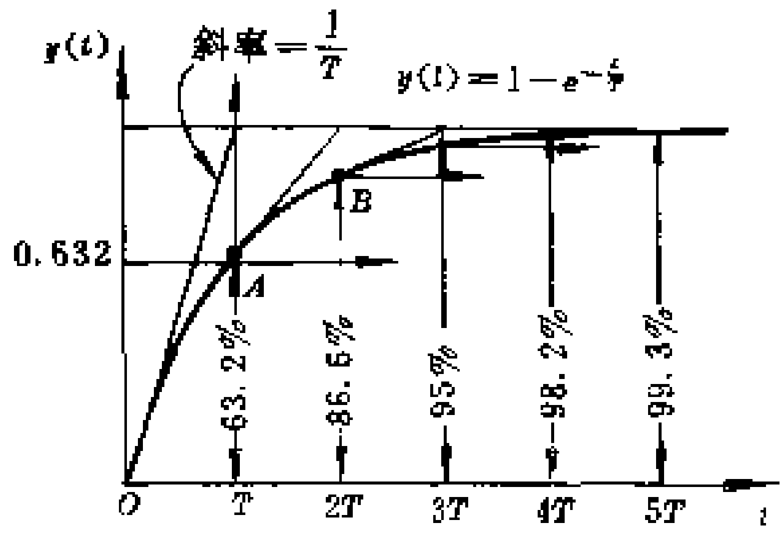


图 1-2　指数响应曲线

3. **一阶惯性系统的单位斜坡响应**　对于单位斜坡输入 $u(t)=t$,有

$$U(s)=\frac{1}{s^2} \tag{1.8}$$

所以

$$Y(s)=\frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s^2} \tag{1.9}$$

展开可得

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T^2}{Ts-1} \tag{1.10}$$

求反变换可得

$$y(t)=t-T+Te^{-\frac{t}{T}}\quad (t\geq 0) \tag{1.11}$$

偏差信号为

$$e(t)=u(t)-y(t)=T(1-e^{-\frac{t}{T}}) \tag{1.12}$$

上式表明偏差随 t 而增大. 但当 $t\to\infty$ 时, $e(\infty)\to T$ 如图 1-3 所示.

4. **一阶惯性系统的单位脉冲响应** 对于 $u(t)=\delta(t)$ 有

$$U(s)=1 \quad (1.13)$$

于是

$$Y(s)=\frac{1}{Ts+1} \quad (1.14)$$

或

$$y(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad (1.15)$$

响应曲线如图 1-4 所示.

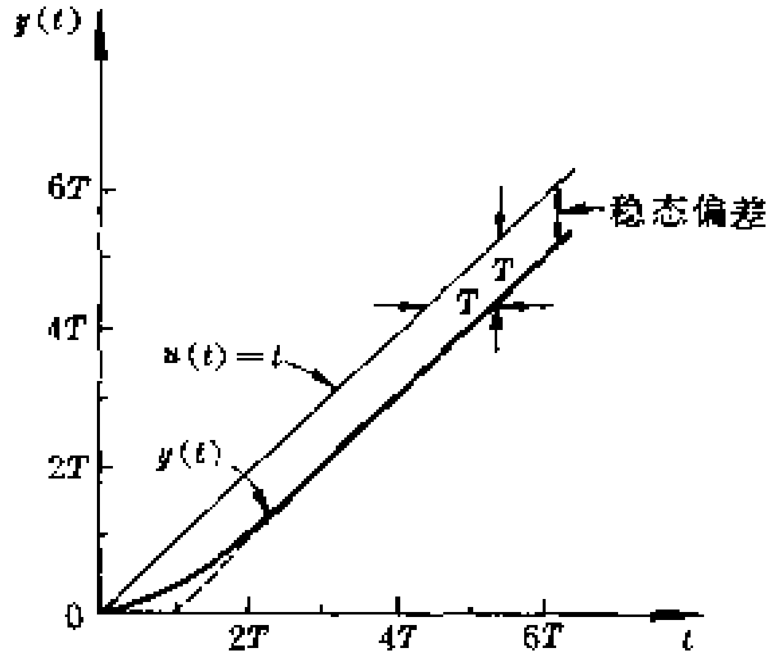


图 1-3 一阶惯性系统的单位斜坡响应

5. **总结** (1)前面讨论了不同输入函数下的过渡响应. 传递函数中的特征参数 T 起着重要作用. 对于单位阶跃响应, T 和初始时刻响应曲线的斜率成反比; 对于单位斜坡响应, T 描写系统的稳态偏差.

(2)系统的稳态偏差不仅取决于传递函数, 而且与输入量有关. 例如, 单位阶跃响应的稳态偏差趋于零; 而单位斜坡响应的稳态偏差不为零. 这提醒我们, 如果输入函数随时间变化太剧烈, 系统稳态伺服特性会变坏.

(3)注意到单位斜坡函数、单位阶跃函数和单位脉冲函数分别地后者是前者的导数, 它们的一阶输出响应之间也存在同样的导数关系. 因此, 系统输入信号导数的响应可以通过系

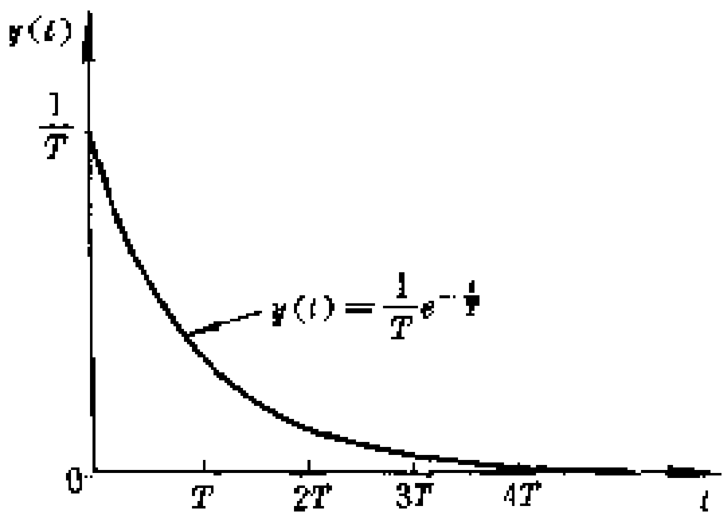


图 1-4 一阶系统的单位脉冲响应

统对原信号响应的导数来求出．同样，系统对输入信号积分的响应也可通过系统对原信号响应和积分来求出．事实上，数学上不难直接证明，所有线性定常系统都具有这种形式．

二、二阶振荡系统的过渡响应

1．二阶系统与阻尼受迫振动　传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{1.16}$$

的系统称为二阶系统．注意到

$$(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)Y(s)=\omega_n^2 U(s) \tag{1.17}$$

和式(1.17)对应的微分方程为二阶常微分方程：

$$\ddot{y}+2\zeta\omega_n\dot{y}+\omega_n^2 y=\omega_n^2 u(t) \tag{1.18}$$

这是一个阻尼受迫振动的动力学方程．ω_n 称为无阻尼自然频率．ζ 称为比阻尼系数．

当 $0<\zeta<1$ 时，相当于欠阻尼情况，系统有一对共轭的极点，其过渡响应是振荡的；$\zeta=0$ 为等幅振荡；$\zeta=1$ 为临界阻尼情形；$\zeta>1$ 为过阻尼情形．$\zeta=1$，相当于系统有二重实数极点情形；$\zeta>1$，系统演变为两个实数单极点情形．临界阻尼系统的过渡响应都表现为无振荡的指数衰减．

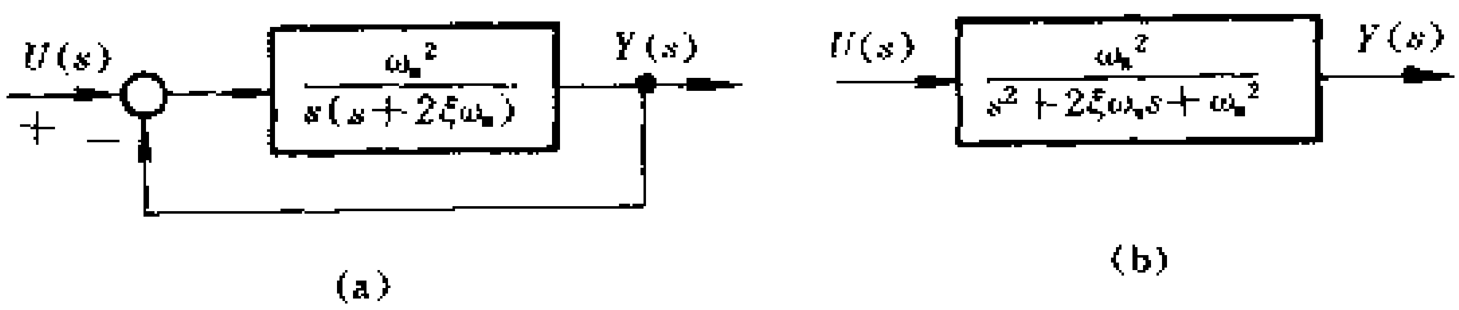


图 1-5　二阶系统方块图：(a)闭环形式；(b)开环形式

这一节我们仅讨论二阶系统的单位阶跃响应．它的脉冲响应和斜坡响应可通过阶跃响应的微分或积分求出．

2．欠阻尼情形$(0<\zeta<1)$　对于单位阶跃输入 $u(t)=1(t)$

$$U(s) = \frac{1}{s} \tag{1.19}$$

有

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{1.20}$$

或

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \tag{1.21}$$

式中

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{1.22}$$

称为阻尼频率. 由第一章 § 5 可知

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \tag{1.23}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t \tag{1.24}$$

因此,式(1.21)的反变换为

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\sin\omega_d t\right) \qquad (t \geq 0) \tag{1.25}$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\sin(\omega_d t + \varphi) \quad (t \geq 0) \tag{1.26}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \tag{1.27}$$

输出和输入的偏差为

$$e(t) = u(t) - y(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\sin(\omega_d t + \varphi) \tag{1.28}$$

由式(1.28)和(1.25)可知，系统的输出在振荡过程中趋近稳态值．振荡频率为阻尼频率，它和 ζ 有关．这个稳态值就是输入值．当 $\zeta=0$，则式(1.26)变为

$$y(t)=1-\cos\omega_n t \quad (t\geq 0) \tag{1.29}$$

这是一种无阻尼等幅振荡．

3. **临界阻尼情况**($\zeta=1$)　这时式(1.20)变为

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2} \tag{1.30}$$

上式的反变换为

$$y(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t) \quad (t\geq 0) \tag{1.31}$$

4. **过阻尼情况**($\zeta>1$)　这时由于分母有两个相异的实根，式(1.20)变为

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s-s_1)(s-s_2)} \tag{1.32}$$

其中

$$s_1=-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n;\qquad s_2=-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n \tag{1.33}$$

这是两个一阶惯性环节的串联，它的反变换可求得为

$$y(t)=1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{s_2 t}}{s_2}-\frac{e^{s_1 t}}{s_1}\right) \quad (t\geq 0) \tag{1.34}$$

可见，这也是无振荡地趋向稳定值．

注意到 $s_1,s_2<0$，式(1.34)中包含两个指数衰减项，并且 $|s_2|<|s_1|$．如果 $\zeta\gg 1$，则 $|s_2|\ll|s_1|$，式(1.34)右边括号内第二项很快趋于零，于是可以略去．同时注意到 $\omega_n^2=|s_1|\cdot|s_2|$，式(1.32)可改写为

$$Y(s)=\frac{1}{s[(s/|s_2|)+1][(s/|s_1|)+1]}$$

注意到 $|s_1|\gg|s_2|$，上式分母最后一个因子可略去，而简化为

$$Y(s) = \frac{|s_2|}{s(s + |s_2|)} \tag{1.35}$$

相应的传递函数可简化为

$$G(s) = \frac{|s_2|}{s + |s_2|} \tag{1.36}$$

于是，系统由二阶降为一阶. 这说明当系统有多于一个极点时，具有较小负实部的极点起主导作用.

不同 ζ 值的二阶系统的单位阶跃响应用图 1-6 表示. 可以看出当 $\zeta=1$ 时，系统以最大最快的速度无振荡地趋向输入值.

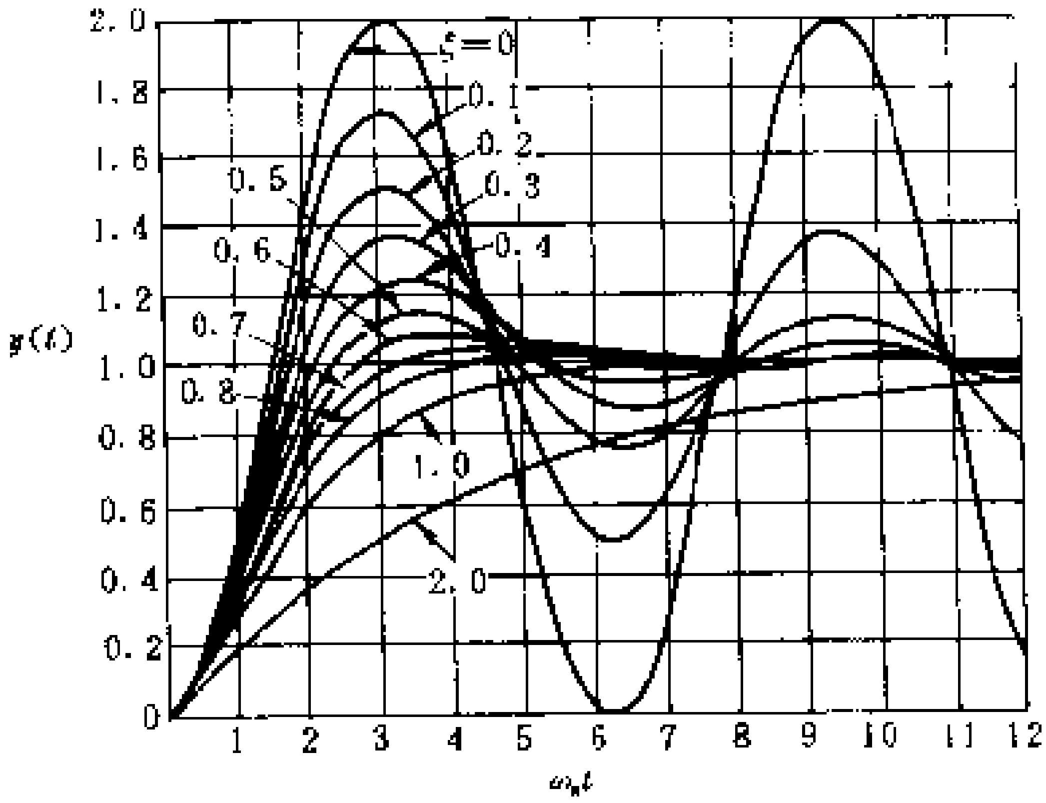


图 1-6　二阶振荡系统的单位阶跃响应

5. 二阶系统的过渡响应指标

由上面的讨论可以看出，二阶系统的性能由 ζ 和 ω_n 两个量完全确定. 然而由于控制系统在实验中对这两个量进行直接测量比较困难. 人们提出了各种指标来衡量二阶系统的性能. 如图 1-7 所示，这些指标有延迟时间 t_d、上升时间 t_r、峰值时间 t_p、最大超调量 M_p 及调整时间 t_s 等等. 作为例子，我们在这里介绍欠阻尼情况下 t_p 和 M_p 与参数 ζ 和 ω_n 之间的关系.

峰值时间 t_p 是指响应曲线从零上升到第一个极大值的时间. 为求出 t_p，对式(1.25)求导数，有

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \tag{1.37}$$

当 $t=t_p$，上式应为零，于是有

$$\sin \omega_d t_p = 0$$

或

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1.38}$$

最大超调量 M_p 就是 $t=t_p$ 时输出值与稳态值之差，即

$$M_p = y(t_p) - 1 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{1.39}$$

可见 M_p 只与 ζ 有关. 由式(1.38)和(1.39)可见，有了 M_p 和 t_p 之值，就可以确定 ζ 和 ω_n，因此二阶系统的基本特性就可确定.

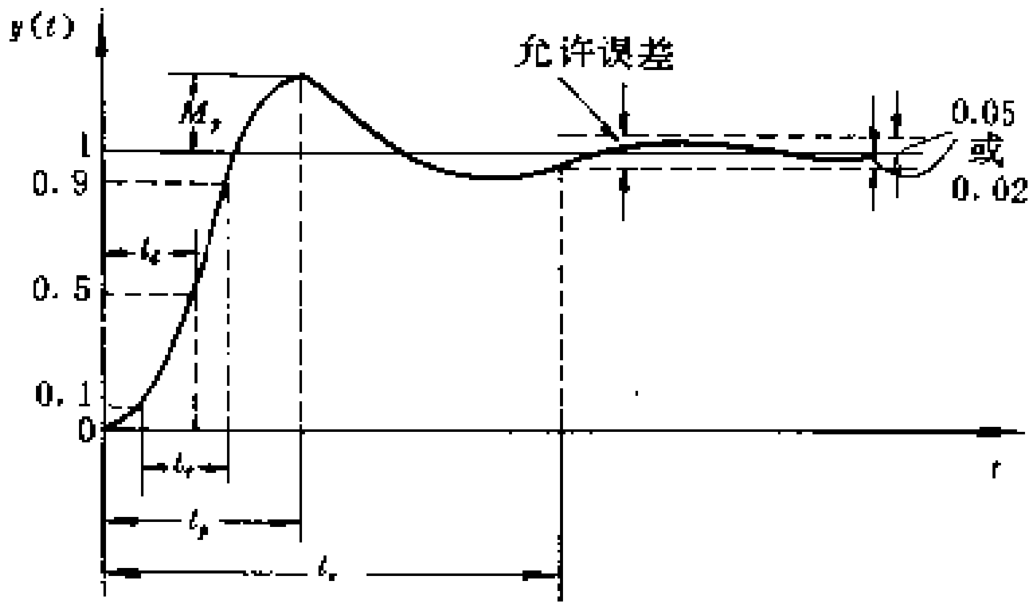


图 1-7　表示性能指标 t_d, t_r, t_p, M_p 和 t_s 的单位阶跃响应曲线

由前面的讨论可以看出，在过阻尼情形，由于 $\zeta>1$，二阶系统的特征方程有两个实根，系统可归结为由两个一阶子系统串联而成. 系统的行为类似于一阶惯性系统. 它的输出无振荡地趋向稳态值，并可由绝对值较小的极点来近似. 在欠阻尼情形，由于 $\zeta<1$，特征方程有一对共轭复根，系统的行为与一阶系统根本不同，它是衰减振荡地趋向稳态值. 为突出二阶系统在欠阻尼情形的这一特点，通常称这一类系统为二阶振荡系统.

三、　高阶系统

第一章曾经指出，一般线性定常系统的传递函数为一有理分式：

$$G(s)=\frac{a_m s_m + a_{m-1}s_{m-1} + \cdots + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0} \quad (m<n) \tag{1.40}$$

当 $n \geq 3$ 时，称为高阶系统.

对式(1.40)进行因式分解，假定结果为

$$G(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \tag{1.41}$$

式中($z_1,z_2,\cdots,z_m$)和($p_1,p_2,\cdots,p_n$)分别表示零点和极点的负值. 另一方面，式(1.40)也可展开成部分分式之和(这里只以极点是各不相同的情形为例)：

$$G(s)=\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{s+p_i} \tag{1.42}$$

从复变函数论角度看，式中系数 c_i 是极点 $s=-p_i$ 的留数. 它们的求法在第一章 §5 作过介绍. 式(1.42)的拉普拉斯反变换就是系统的单位脉冲响应：

$$g(t)=\sum_{i=1}^{m}c_i e^{-p_i t} \tag{1.43}$$

后面介绍稳定性理论时将说明，从自动控制角度看，我们感兴趣的系统是所有极点为负实数或具有负实部的复数，即 $\mathrm{Re}[p_i]<0$. 从几何上看，它们全部位于 s 复平面的左半平面. 因此，式(1.42)每个部分分式所对应的脉冲响应分量都是随时间而衰减的. 系数 c_i 的大小确定每一个分量的权重. 而 $\mathrm{Re}[p_i]$ 则确定相应分量的指数衰减速率. 如果某个极点远离 s 平面的坐标原点，即处于遥远的左半面上，那么它的留数也一定很小. 这个极点所引起的脉冲响应分量所占的权重小，而且衰减快，因而对整个系统行为的影响也小，可以忽略.

另一方面，从式(1.41)看，如果有一个极点和某个零点重合，比如 $p_n=z_m$，那么由于它们相约，式(1.41)就可简化为

$$G(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_{m-1})}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_{n-1})} \tag{1.44}$$

这种情形称为零极点相消. 不过即使两者不完全相等，只要充分接近，$p_n \approx z_m$，那么它们也可以近似地约去，式(1.44)也可近似成立. 事实上，这时的极点 $s=-p_n$ 所对应的留数也一定很小. 它对系统的贡献从式(1.42)角度看也可以略去. 通过这样的方法，高阶系统就可由低阶系统来近似.

一个实际的控制系统，传递函数，式(1.40)，分子分母各系数都是实数. 因此，它的零点和极点一定或者是实数或者是成对出现的共轭复数. 如果在实数范围内进行分解，那么对应于式(1.42)的应是

$$G(s)=\sum_{i=1}^{q}\frac{c_i}{s+p_i}+\sum_{k=1}^{r}\frac{c_k(s+\zeta_k\omega_k)+c_k\omega_k\sqrt{1-\zeta^2}}{s^2+2\zeta_k\omega_k s+\omega_k^2} \tag{1.45}$$

式中 $q+2r=n$. 可以看出，高阶系统由一些简单的子系统组成. 这些简单的子系统就是前面讨论过的一阶惯性系统和二阶振荡系统.

根据刚才的讨论，这些子系统对整个高阶系统的贡献是不同的. 越接近 S 平面坐标原点并且远离各个零点的极点对系统整体行为影响越大. 对系统行为起主要作用的极点称为主导极点. 多数实际系统，主导极点是一对复数共轭极点. 这时，一个高阶系统可以用一个二阶振荡系统来近似. 如果主导极点是某个负实数，那么系统将近似于一阶惯性系统，无振荡地趋向稳态值.

§2　反馈控制的意义

在日常生活、工业生产和科学实验中需要某些物理量保持恒定. 比如房屋的恒温恒湿；化工厂和发电厂的压力、温度、流量的定值控制；动力机械的转速控制. 在另一些场合又要求控制系统的行为能够随输入信号的改变而改变，如雷达对飞机的跟踪等等. 信号

的反馈是实现上述控制的关键技术.本节用一些简化的例子说明反馈控制系统的构成和意义.

一、反馈控制系统的构成

蒸汽机的转速控制是早期的中心课题之一.最原始的手动控制过程可能是这样进行的.首先采用某种方法观测蒸汽机的转速,一旦转速太低,由人去开大蒸汽的阀门.由于飞轮的惯性,转速不能立即变得很大.等到它逐渐地变到足够大时,再关小蒸汽阀门.由于蒸汽机的负荷并不是恒定的.阀门开度与转速之间没有一一对应关系.阀门开多少合适需要凭经验去判断.这种调整需要不断地进行.如果蒸汽机负荷和蒸汽压力不变,可以相信,最后一定可以调到合适的转速.但是一旦负荷改变或者蒸汽压力有变化,这种调整又要重新进行.从全过程看,转速控制的准确性很低.并且会因人而异.这种控制从工程角度看是一种开环控制.图 2-1 为其示意图.

如果把人的作用包括在内就构成一种闭环控制.蒸汽机的转速信号通过人的眼睛传达到大脑去决定阀门的开度.这个过程就是信息反馈.这种反馈作用在工程上加以实现就构成了转速的自动调节系统.

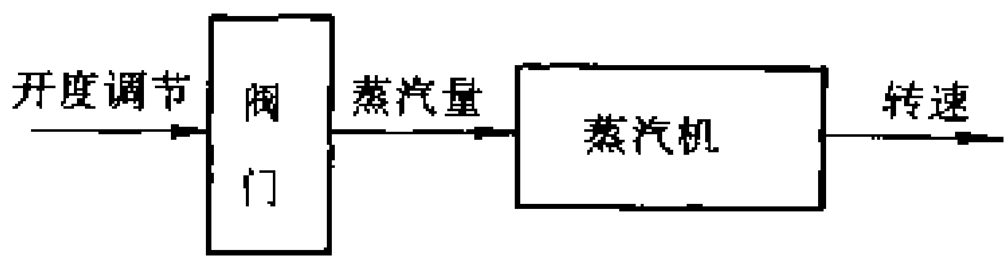


图 2-1 蒸汽机转速开环控制示意图

转速控制实际上是动力机械推广应用的关键技术之一.被誉为蒸汽机发明人的瓦特,同时也是离心调速器在蒸汽机上应用的创导者.麦克斯韦则是调节理论的奠基人.现在,不仅蒸汽机,而且所有内燃发动机也都采用了这种装置来粗略控制转速.如图 2-2,离心调速器的原理是利用弹簧弹力(或重力)和离心力的平衡来测

量转速.转速越高离心力越大,弹簧受压缩也越多.可以用弹簧活动端的移动距离代表发动机的转速.由于把燃料阀门和弹簧活动端相联,就构成了发动机转速的调节装置.弹簧预置得不同.发动机的稳定转速也不同,发动机的转速就受到预置值的控制,它的反馈控制示意图如图 2-3.

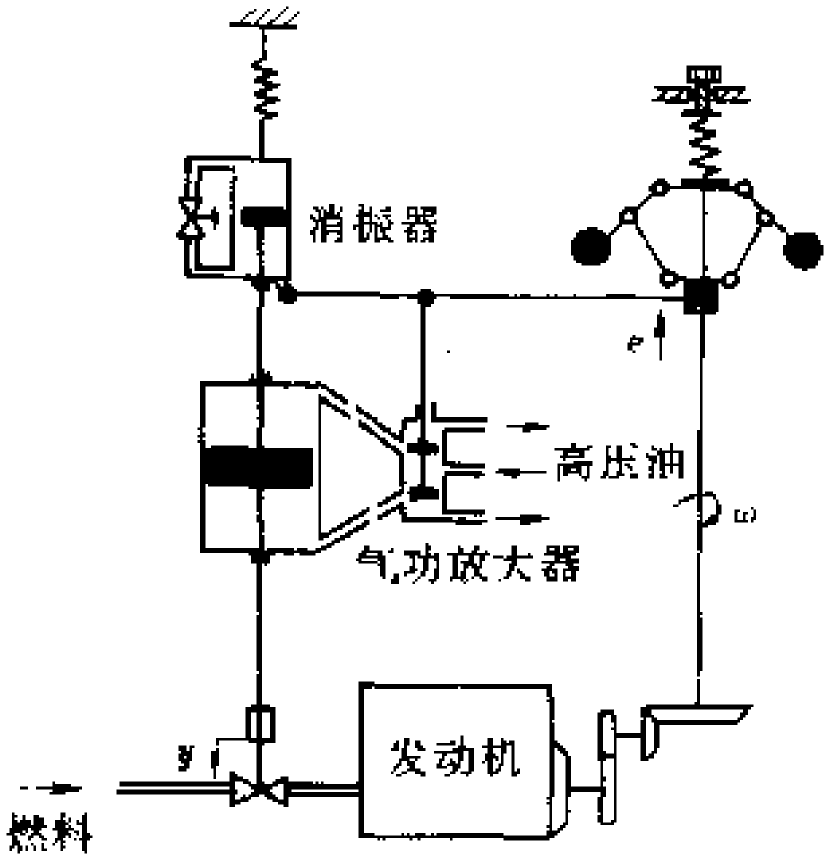


图 2-2　转速控制原理图

图 2-3 的系统与图 2-1 所示系统的不同之处在于有一个离心调速器,它可以测量转速,同时可以通过预置弹簧设定转速.并可以将得到的偏差信号去调节阀门.由于功能上的不同,在图 2-3 中把一个调速器分成两部份:测速器和减法器.由于离心调速器一直对转速进行监示,并且能够取得和期望值的差值去调节阀门,因此转速能够得到比较粗略的控制.这是反馈控制的主要优点.但是这种机械上的测量和调节系统不仅体积庞大,而且准确性不高,得不到理想的结果.由于电子管以及随后的晶体管和集成电路的发明,利用电子学系统可以方便地构成各种性能的控制器,大大扩大了系统的控制功能,一般反馈控制系统

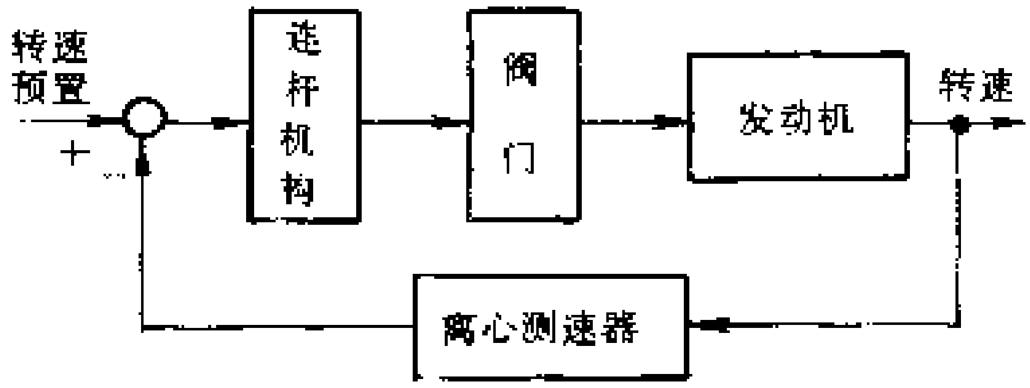


图 2-3　转速反馈控制示意图

的构成如图 2-4 所示.

由电子学电路构成的控制系统大体上可分为如下四个部分:

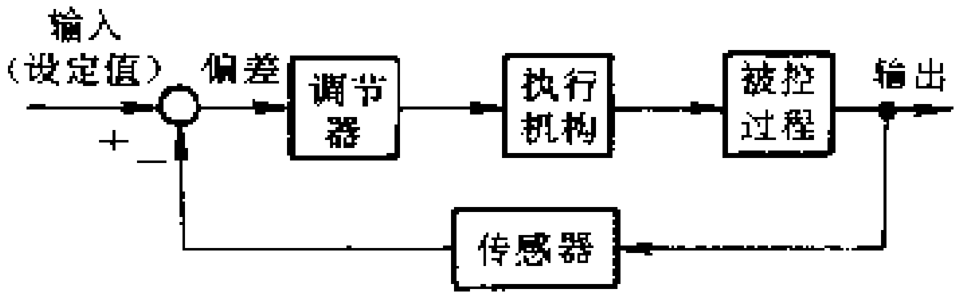


图 2-4 反馈控制系统示意图

(i)被控过程;

(ii)对被控进行测量并转换成电信号的传感器;

(iii)根据控制信号的大小改变被控量的执行机构;

(iv)具有各种运算功能的控制器.

传感器、执行机构和控制器是构成反馈控制系统的基本控制元件. 要控制不同的被控过程,只要采用相应的传感器、执行机构和控制器就可完成. 如果要控制的是电动机转速,通常采用测速发电机作传感元件. 而由于硅可控制器(SCR)可以根据微弱的控制信号(电压或电流)去改变大功率的拖动电力,它在这里被作为执行元件. 要控制温度则需要铂电阻或热电偶作为温度传感元件. 如果被控的加热系统是用电力供电的,如电炉,电烘箱等恒温器,则也可以采用硅可控整流器构成执行元件. 对于化工和电力部门在生产过程中需要进行压力和流量的控制,则既需要相应的压力和流量的传感器,也需要电动阀门作为执行元件去控制管道的流量. 如此种种的应用,使得自动化工业部门按照控制器、传感器和执行机构三大类研制出一代代标准化、系列化的仪表进一步又推动了自动控制技术的应用和发展. 除了电动仪表之处,还有气动仪表、液压仪表等. 然而,控制系统的划分是相对的. 它们之间可以合并,也可以分成更小的单元. 这要根据控制对象的复杂性、精确度的要求和经济指标而定.

二、 反馈控制系统的传递函数

1. 方块图 一个复杂的控制系统常常由不同的子系统(或称

为环节)构成.每个环节按各自的功能都有相应的数学模型.这里数学模型用传递函数来描写.对于图 2-4 所示的定值调节系统,假定控制器、执行机构和被控过程的传递函数分别为 $G_1(s)$、$G_2(s)$和 $G_3(s)$,传感器的传递函数为 $H(s)$,于是可以画出方块图,如图 2-5.这样的方块图既反映了定值调节系统的信号传输过程,也表达了各环节之间的数学关系.假定图 2-5 中所有在前向通路中串联在一起各个环节的传递函数 $G_1(s)$、$G_2(s)$和 $G_3(s)$用一个统一的传递函数 $G(s)$来表示:

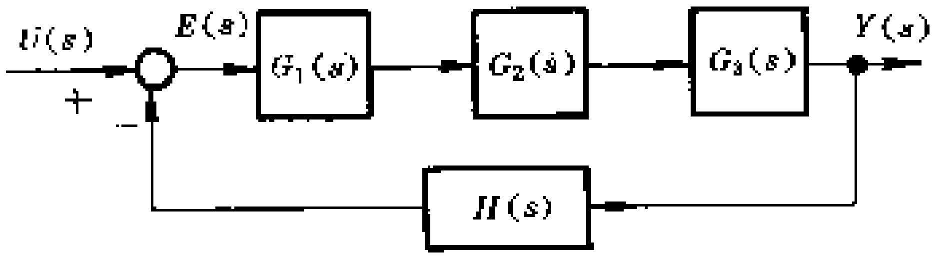


图 2-5　定值调节系统方块图

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \tag{2.1}$$

那么,图 2-5 便可用图 2-6 来代替.

根据图 2-6,传感器 $H(s)$将输出信号 $Y(s)$反馈到输入端的比较器,它和输入量 $U(s)$ 一起对系统起控制作用.这就构成了所谓反馈控制.由于反馈通路的存在,整个控制系统在形式上类似于一种闭合回路,所以又称闭环控制.

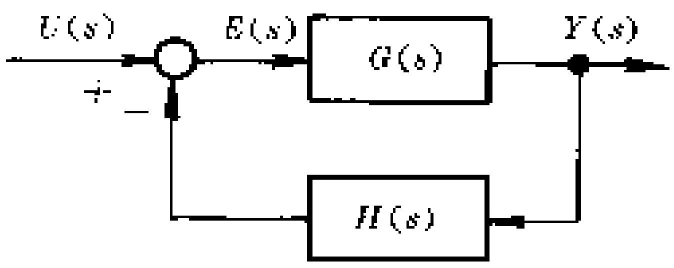


图 2-6　反馈控制系统方块图

如果没有传感器把输出信号返回到输入端,则称开环控制.或前馈控制.对于这一类系统,只有对被控对象能够进行足够详尽的了解和描述,并且对于控制器又能够根据需要进行精密的设计,才能进行准确的控制.

2. **闭环传递函数**　根据第一章§7 的讨论,图 2-7 所示的负反馈系统的闭环传递函数为

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{2.2}$$

注意到反馈系统是通过偏差信号 $E(s)$对系统的控制施加影响的.偏差量又是研究反馈系统伺服特性的重要内容.现在进一步讨论偏差信号 $E(s)$的表达式.

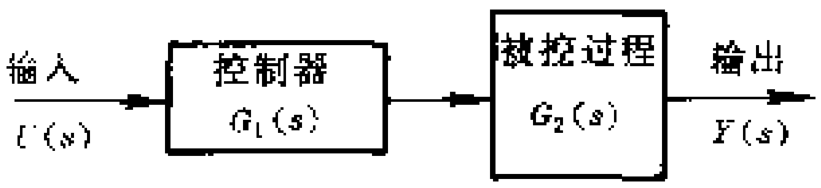


图 2-7　开环控制系统

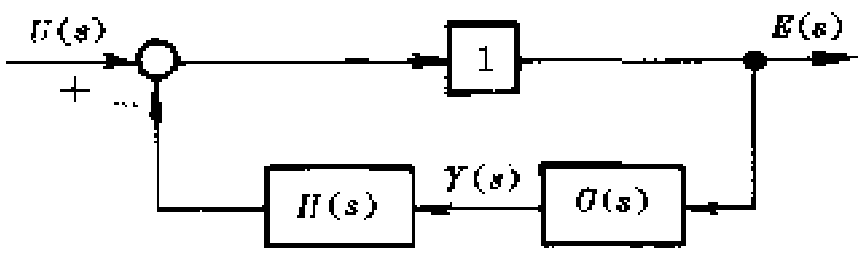


图 2-8　以偏差量为输出的方块图

如果将方块图 2-6 等价变换为图 2-8,这时 $E(s)$为输出,原来的输出 $Y(s)$成了中间变量.值得注意的是在图 2-9 中,前向通路只是一条信号传输线.由于它不引起前后数学关系的改变,传递函数应当等于1.而图 2-8 中反馈通路则由 $G(s)$和 $H(S)$两个环节串联而成.按照式(2.2),以 $E(s)$为输出,$U(s)$为输入的传递函数为

$$\frac{E(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+G(s)H(s)} \tag{2.3}$$

或

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}U(s) \tag{2.4}$$

3. 多输入系统的独立作用原则　假定系统除了正常输入信号 $U(s)$以外,还在某个节点引入干扰信号 $N(s)$,如图 2-9.现在研究这类系统两个输入信号 $U(s)$和 $N(s)$对输出 $Y(s)$的影响.

由图 2-9 可见

$$E(s)=U(s)-H(s)Y(s) \tag{2.5}$$

$$X(s) = N(s) + G_1(s)E(s) \tag{2.6}$$

$$Y(s) = G_2(s)X(s) \tag{2.7}$$

上面三式消去中间变量 $E(s)$ 和 $X(s)$，整理后可得

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}U(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s) \tag{2.8}$$

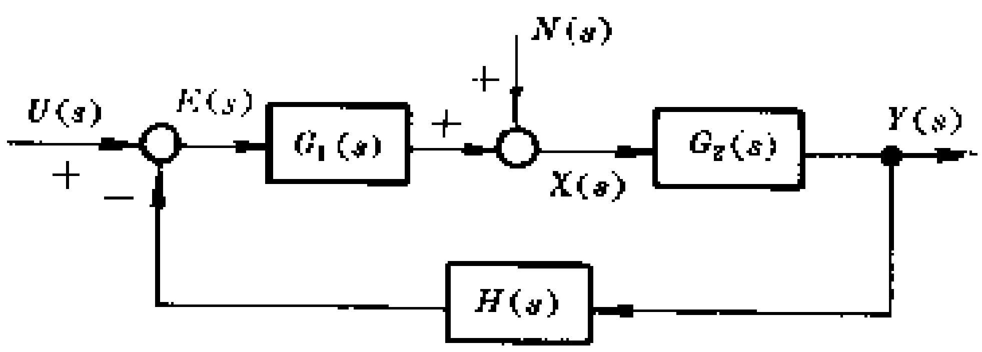


图 2-9　有干扰的反馈控制系统

由上式可见，输出 $Y(s)$ 等于输入信号 $U(s)$ 的贡献和干扰信号 $N(s)$ 的贡献之和。并且，右边第一项 $U(s)$ 的系数正好是系统不受干扰时的闭环传递函数；第二项 $N(s)$ 的系数也正好是 $U(s) = 0$ 时，系统以 $N(s)$ 为输入，$Y(s)$ 为输出的闭环传递函数。两个输入量 $U(s)$ 和 $N(s)$ 对输出的贡献是相互独立的。它们不随对方是否存在或取值大小而改变。这就是线性控制系统**输入信号的独立作用原则**。

显然，两个输入信号的结论可以推广到更多个输入信号的情形。因此，对于多输入的线性控制系统，如果只需要研究其中某一个输入量对系统输出的影响，可以不考虑其他输入的贡献，或假定其他输入为零。这一点对于处理实际问题是简便的。

三、反馈控制系统的伺服特性

输出信号的反馈是实现伺服控制的有效方法。这一点已在本节开始部分作了定性说明。下面举例进行定量表述，使读者获得比较贴切的感性认识。

〔例 1〕现在讨论如图 2-10 所描述的温度自动调节系统. 为简

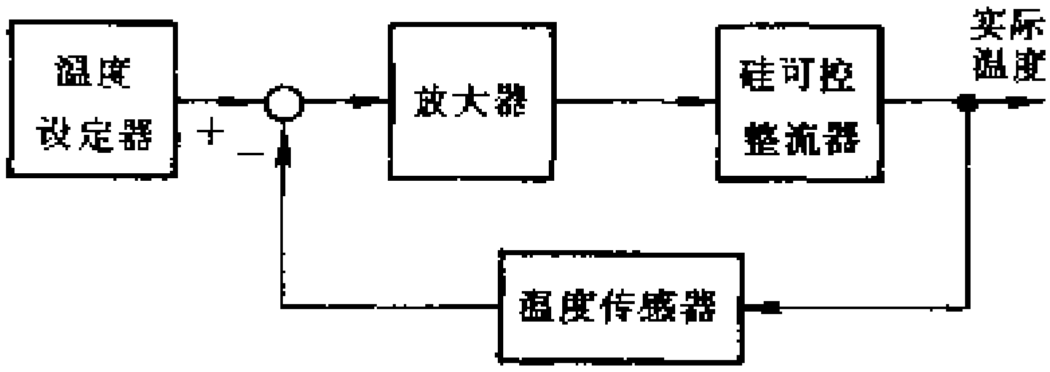


图 2-10　温度自动调节系统示意图

化讨论,假定传感器的输出和实际被测温度具有简单的正比关系:

$$H(s) = h \qquad \text{(A1.1)}$$

并且,放大器和硅可控整流器也都可以表示成简单的比例关系. 设两者串联在一起的总的放大倍数为 k,即

$$G_1(s)G_2(s) = k \qquad \text{(A1.2)}$$

本例的控制对象是恒温箱的温度. 和第一章 § 6 中例 3 题关于化学反应器加热过程所作的讨论相似,恒温箱的传递函数在一阶近似下也可写成

$$G_3(s) = \frac{c}{Ts+1} \qquad \text{(A1.3)}$$

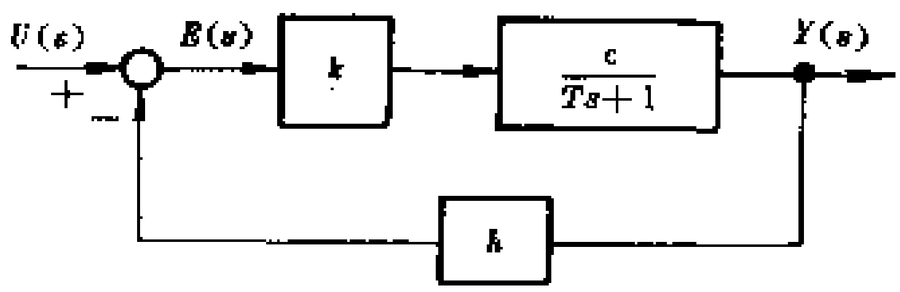


图 2-11　简化的温度反馈控制系统

这样,温度控制系统的方块图就变为如图 2-11 所示.

为意义清晰起见,对方块图 2-11 作适当变换:主要是将相加点沿反馈通路移至反馈环节(传感器)的前方. 也就是将反馈环节的传递函数包含在前馈通路之中,如图 2-12 所示.

其过程是这样的:由于在图 2-11 中,有

$$E(s) = U(s) - hY(s) \qquad \text{(A1.4)}$$

在图 2-12 中，相加点在 $E_1(s)$ 的前面，而

$$E_1(s) = \frac{1}{h}[U(s) - hY(s)] = \frac{1}{h}U(s) - Y(s) \quad (A1.5)$$

这说明，为了保持方块图 2-11 和 2-12 等价，在图 2-12 中，$U(s)$ 与新的相加点之间必须增加一个环节 $1/h$. 设

$$U_1(s) = \frac{1}{h}U(s) \quad (A1.6)$$

为新的输入量，则图 2-12 可简化为图 2-13. 这是一个单位反馈方块图. 由于 h 是恒温器的实际温度值与温度传感器输出电压值之

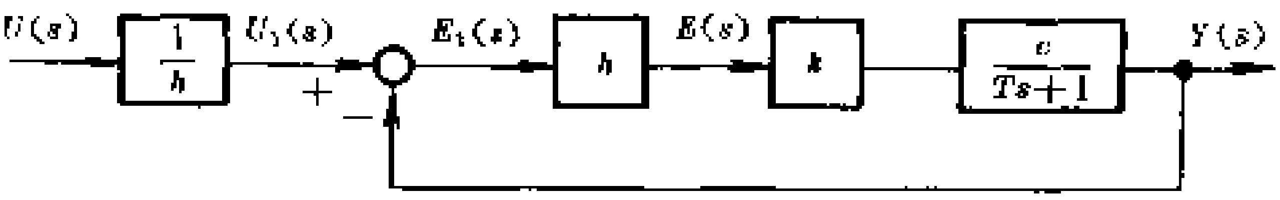


图 2-12 相加点移动后的方块图

间的比例系数，也是温度和电压的换算因子，其单位为 V/℃. 而 $u(t)$ 是温度设定值的电压信号，因此 $u_1(t)$ 就是相应于 $u(t)$ 的温度设定值本身. 它表示人们要求系统达到的温度. 为使例子更简单一些，我们设 $u_1(t)$ 是单位阶跃函数，即

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases} \quad (A1.7)$$

由图 2-13 可得以 $U(s)$ 为输入的闭环传递函数为

$$W(s) = \frac{hkc}{Ts + 1 + hkc}$$

或

$$W(s) = \frac{\dfrac{hkc}{1 + hkc}}{\dfrac{T}{1 + hkc}s + 1}$$

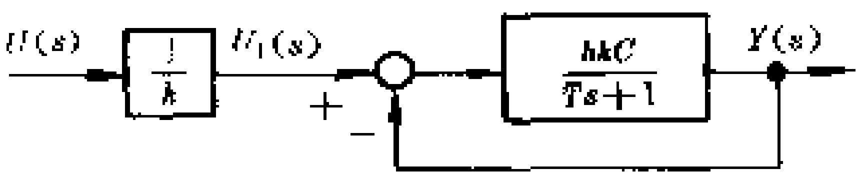


图 2-13 简化方块图

令

$$K = hkc \tag{A1.8}$$

它代表系统前向通路的总增益(放大倍数),并且令

$$K_1 = \frac{hkc}{1 + hkc} = \frac{K}{1 + K} \tag{A1.9}$$

$$T_1 = \frac{T}{1 + hkc} = \frac{T}{1 + K} \tag{A1.10}$$

于是

$$W(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1} \tag{A1.11}$$

由此可见,一阶环节的单位反馈系统仍为一阶系统,K_1 和 T_1 分别为闭环系统的增益和时间常数. 由于式(A1.7),

$$U_1(s) = \frac{1}{s}$$

于是

$$Y(s) = G(s)U_1(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1} \frac{1}{s} \tag{A1.12}$$

不难根据本章 § 1 的讨论,求得式(A1.12)在时间域的过渡响应为

$$y(t) = K_1(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \tag{A1.13}$$

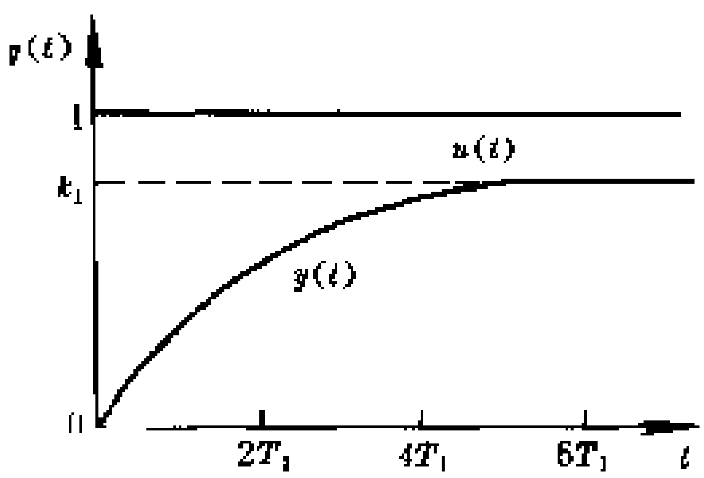


图 2-14 响应曲线

其响应曲线如图 2-14 所示. 和 § 1 中的情形类似,系统经过一段时间之后趋向稳态值. 但由于这里的闭环增益为

$$K_1 = \frac{K}{1 + K} < 1$$

因此，响应曲线不趋于1，而是趋于k_1. 因此与设定值存在着偏差，由拉普拉斯变换的终值定理，有

$$e_1(\infty)=\lim_{s\to 0}sE(s)=1-K_1=\frac{1}{1+hkc} \quad (A1.14)$$

由此可见，通过反馈实现的定值调节系统如果存在不为零的稳态偏差，则可通过增大开环增益K(特别是放大器的放大倍数k)来减小. 可以看出图2-10中设置放大器的意义.

另一方面，由式($A1.10$)可知，闭环时间常数T_1小于开环时间常数T. 同样，K越大，T_1越小. 从而加快了系统的响应速度.

以上两点是温度控制系统由于引入反馈以后的重要特点.

最后应当指出，在这里，整个温度自动调节系统是被大大简化了的. 首先对被控过程我们忽略了很多因素：比如环境的稳定性，温度分布均匀性以及恒温器本身的传热问题等等. 控制器和传感器一般都有时间的滞后，有时还具有比较复杂的函数关系. 因此实际系统的行为常常与二阶振荡系统更接近一些. 这里只是为了初步介绍一种方法，对系统作了非常粗略的、理想化的近似.

〔例2〕本例将进一步说明：和开环控制相比较，闭环控制可降低系统的输出响应对内部参数变化，特别是元件变化的敏感程度.

如果我们要设计一个适当的开环控制系统，必须非常谨慎地选择开环控制器的所有元件，以使它们能够准确地响应. 然而，对于设计一个闭环控制系统来说，可选用精度较低的元件，这是因为系统对$G(s)$中参数变化的敏感程度减小为原有的$1/[1+G(s)]$.

为了说明这点，分别考虑如图2-15(a)和(b)所示的开环和闭环系统，假定，由于参数的变化，$G(s)$变为$G(s)+\Delta G(s)$，式中$|G(s)|\gg|\Delta G(s)|$，那么，在图2-15(a)所示的开环系统中，输出为：

$$Y(s)+\Delta Y(s)=[G(s)+\Delta G(s)]U(s)$$

因此，输出的变化是，

$$\Delta Y(s) = \Delta G(s)U(s)$$

在图 2-15(b)所示的闭环系统中

$$Y(s) + \Delta Y(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + G(s) + \Delta G(s)}U(s)$$

即

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta G(s)}{1 + G(s)}U(s)$$

于是,由于 $G(s)$ 中的参数改变所引起的闭环系统的输出的变化减小为原来的 $1/[1+G(S)]$,在许多实际情况中,$|1+G(s)|$ 的值远远大于 1.

因此,为了减小元件参数变化对系统的影响,我们通常对精度低的元件并联一个反馈回路. 事实上,反馈系统的精度常常取决于反馈通路中传感元件的精确性.

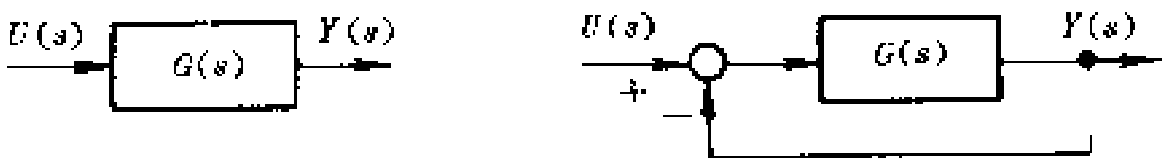


图 2-15 (a)开环系统,(b)闭环系统

[例 3]近代的远洋船舶都装有水平舵以克服海浪引起的颠簸,如图 2-16(a). 其方块图如图 2-16(b). 图中 θ_d 表示航行中要求的船体容许滚角,θ_c 表示船体实际滚角. 滚角的大小用垂直陀螺仪来测量,设传递函数为常数 K. 船体摇摆的动力学过程假定可以用二阶振荡环节来描写:

$$G_s(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2} \qquad (A3.1)$$

海浪作用于船体的扭矩为 $N(s)$,在控制系统的前向通路中设置一个放大器(水平舵伺服调节器)用来改善系统的伺服特性,设放大倍数为 K_1. 假定海浪对船体的扰动可用单位阶跃函数来表示,即

$$N(s) = \frac{1}{s} \tag{A3.2}$$

现在要讨论的是扰动对船体滚角的影响.

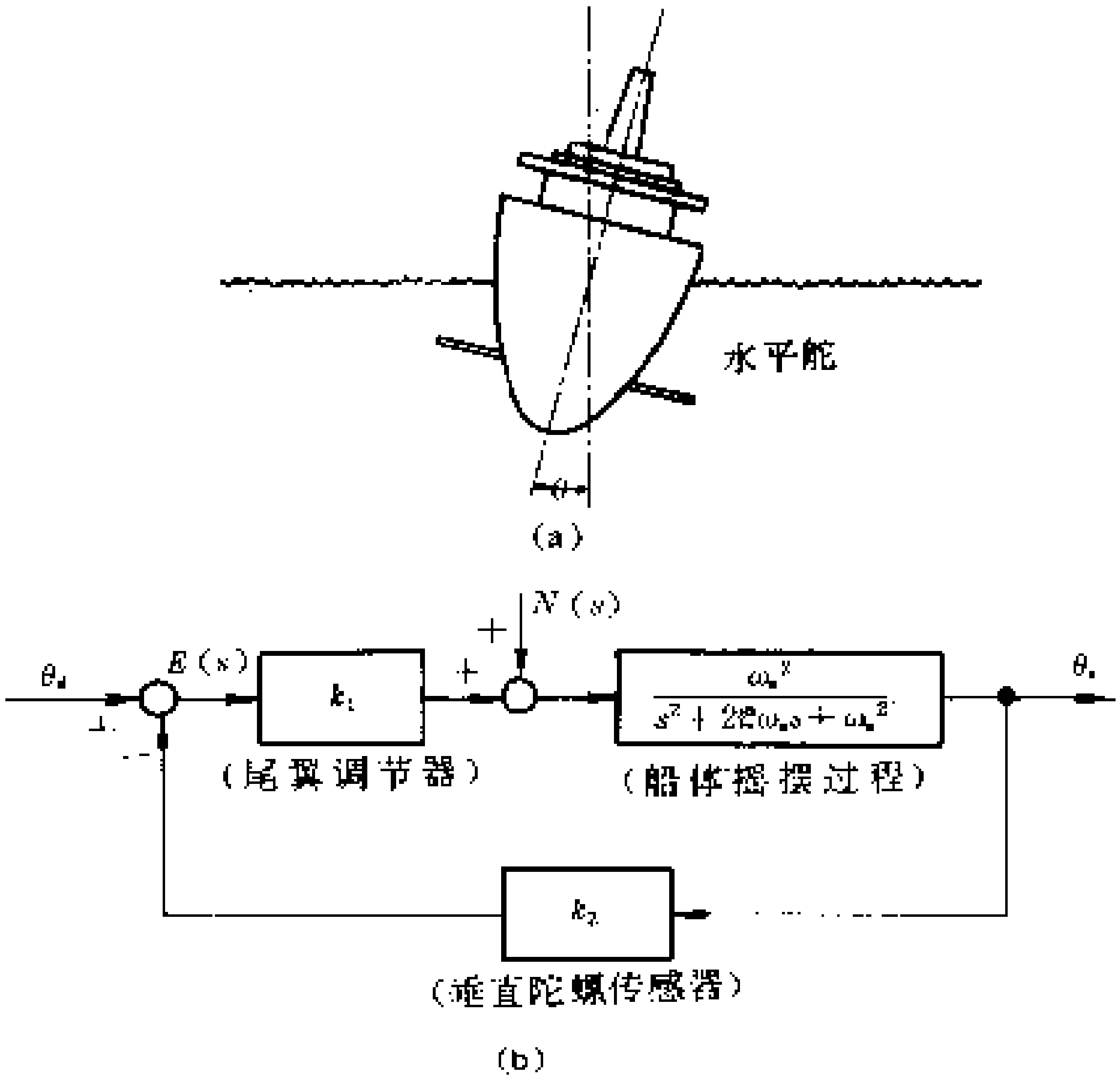


图 2-16　船体的抗浪控制

图 2-16(b)表示的是一个具有两个输入的系统. 根据前面的论述,当讨论其中一个输入 $N(s)$对系统的影响时,可以假定另一个输入 $\theta_d=0$. 这时,系统的方块图等价于图 2-17,从 $N(s)$到 $\Theta_a(s)$的闭环传递函数为

$$W(s) = \frac{\Theta_a(s)}{N(s)} = \frac{G_s(s)}{1 + k_1k_2G_s(s)}$$

于是

$$\Theta_a(s) = W(s)N(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + k_1k_2\omega_n^2}\frac{1}{s} \tag{A3.3}$$

上式右边考虑了式(A3.1)和(A3.2).

如果考虑扰动对船体的稳态影响，则根据拉普拉斯变换的终值定理有

$$\theta_a(\infty) = \lim_{s\to 0} s\Theta_a(s) = \frac{1}{1+k_1k_2} \qquad (A3.4)$$

只有充分增大水平舵的伺服调节器的放大倍数，海浪对船体颠簸的稳态影响可以得到有效的抑制. 如果系统是开环的，那么单位阶跃扰动对输出的稳态贡献趋于1. 扰动对输出的影响得不到抑制. 这又一次说明反馈对伺服控制的意义.

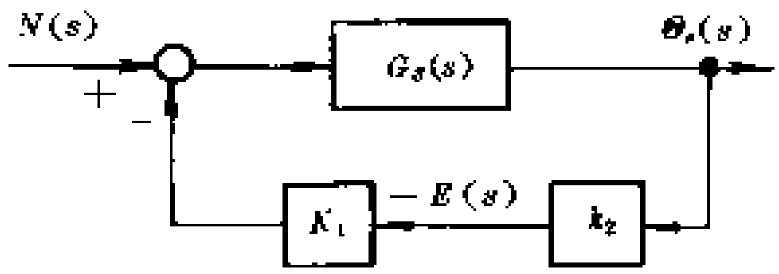


图 2-17　等价方块图

当然，在这个例子中，只涉及扰动对系统稳态特性的影响. 如果要进一步讨论如何抑制扰动对系统瞬态特性的影响，那么水平舵的伺服调节器不能只是一个单纯的比例放大器. 这个问题留待下一节讨论.

归纳起来，反馈有以下作用：

(1)改变系统的时间常数，改善响应速度；

(2)改善系统的线性度，降低非线性元件对系统行为的影响. 线性度主要取决于传感元件.

(3)变积分环节为一阶惯性环节.

(4)利用正反馈可增大回路增益.

后面还会发现反馈的不利一面. 除了增加系统的复杂性外，在应用不当时将引起系统的不稳定.

§3 工业控制中的 PID 调节

前节指出，工业应用的反馈控制系统中，控制单元通常分为三类：传感器、调节器和执行机构，如图 2.5 所示. 其中，调节器设计成通用的，称 PID 调节器，是比例-积分-微分调节器的英文单词的缩写. 传感器和执行机构因控制功能不同而异. 本节介绍 PID 调节器的控制原理.

1. **比例控制** 由上节温度控制的简单例子可以看出，控制器放大倍数 k 对于一阶系统的控制性能起着十分重要作用. 但是实际过程中，k 的增大是受到限制的. 如果 k 过大就会引起一些不利的效应，最常见的是引起振荡，因此必须考虑其它措施. 工业中，常用的还有积分控制和微分控制. 而把调整放大倍数的控制手段称为比例控制.

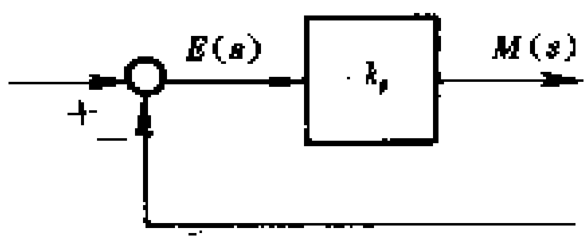


图 3-1 比例控制方块图

由于控制器通常加在被控制过程之前，我们用 $m(t)$ 表示中间输出，偏差信号 $e(t)$ 表示输入，对于增益为 K_p 的比例控制

$$m(t) = K_p e(t) \tag{3.1}$$

或

$$G(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p \tag{3.2}$$

其方块图用图 3-1 表示.

2. **积分控制** 如果控制器的输出 $m(t)$ 是输入 $e(t)$ 的积分，即

$$m(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.3}$$

上式右边加 $\frac{1}{T_i}$ 是出于量纲上的考虑，T_i 称为积分时间.

则该控制称为积分控制. 其传递函数为

$$G(s)=\frac{M(s)}{E(s)}=\frac{1}{T_i s} \tag{3.4}$$

其方块图如图 3-2 所示.

对于这样的系统,只当 $e(t)\equiv 0$ 时输出 $m(t)$ 才保持常数. 只要 $e(t)\neq 0$, $m(t)$ 就要改变. $e(t)>0$, 输出 $m(t)$ 增大; $e(t)<0$, $m(t)$ 减小. 可以利用这一性质来消除如前所述的温度控制系统的稳态偏差. 假定系统的构成如图 3-3 所示, 它的闭环传递函数为

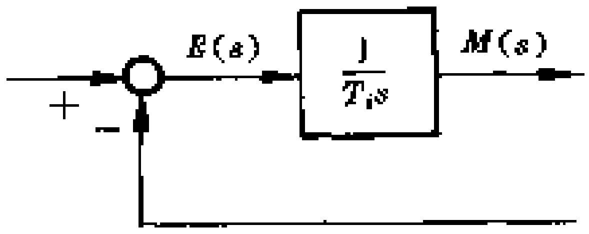


图 3-2 积分控制方块图

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{C/T_i}{Ts^2+s+C/T_i} \tag{3.5}$$

而偏差函数则为

$$E(s)=\frac{U(s)}{1+\frac{1}{T_i s}\frac{C}{Ts+1}}=\frac{T_i s(Ts+1)}{T_i s(Ts+1)+C}U(s) \tag{3.6}$$

对于单位阶跃输入 $U(s)=1/s$, 其稳态偏差可由终值定理求出:

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{T_i s(Ts+1)}{T_i s(Ts+1)+C}\cdot\frac{1}{s}=0 \tag{3.7}$$

这样就消除了温度定值控制时的稳态偏差. 显然和前面的比例控制相比是一种重要的改进.

由于积分控制对于偏差输入的瞬态响应非常缓慢, 通常和比例控制一起应用, 即

$$m(t)=K_p e(t)+\frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.8}$$

传递函数为

$$\frac{M(s)}{E(s)}=K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) \tag{3.9}$$

式中 K_p 代表比例增益. T_i 只决定积分控制作用,而 K_p 的变动则同时影响比例控制和积分控制. 严格地说这种控制称为比例—加—积分控制,或 PI 调节.

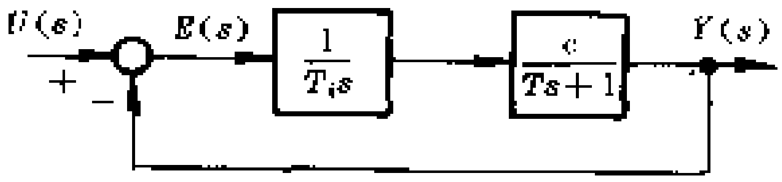


图 3-3 温度控制系统方块图

3、微分控制

微分控制被定义为

$$m(t) = T_d \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$G(s) = T_d s$$

T_d 称为微分时间常数. 其方块图见图 3-4,微分控制亦称速率控制. 它的输出和偏差信号 $e(t)$ 的变化率成正比,如果 $e(t)$ 变化非常缓慢,它的输出非常小,但当偏差信号有一个快速变动时,微分控制器可以产生一个非常强的输出脉冲加于被控对象,从而较大地改善了系统的瞬态响应特性.

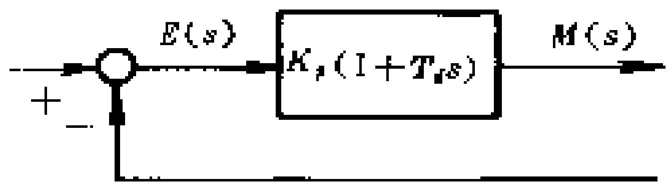


图 3-4 PD 控制方块图

所以和积分控制一样,微分控制常常和比例控制一起应用,即比例—加—微分控制:

$$m(t) = K_p\left[e(t) + T_d \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\right] \tag{3.10}$$

$$G(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s) \tag{3.11}$$

在举例说明微分控制对系统性能的影响之前,先研究具有一定惯性矩的负载进行角度控制时的比例控制,如图 3-5. 传递函数为

$$G(s) = \frac{K_p}{Js^2 + K_p}$$

因特征方程为

$$Js^2 + K_p = 0$$

的根是虚根，其阶跃响应是无限的连续振荡，这不是希望的. 如果我们加入比例-加-微分控制(或 PD 控制)，如图 3-6，其闭环传递函数为

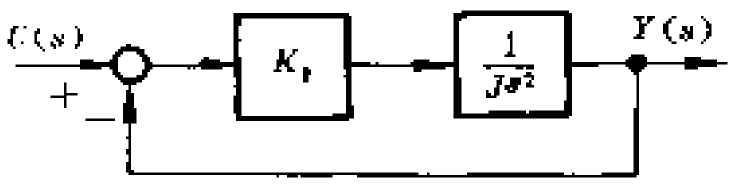


图 3-5 惯性负载比例控制方块图

$$G(s) = \frac{K_p(1 + T_d s)}{Js^2 + K_p T_d s + K_p}$$

其特征方程为

$$Js^2 + K_p T_d s + K_p = 0$$

由于 J, K_p, T_d 都为正，两个特征根具有负的实部，因此微分控制引入了阻尼. 整个系统变成了一个带阻尼的二阶振荡系统. 如 §1 所描述，其单位阶跃响应最终趋向稳态值 1. 这种控制明显地优于比例控制.

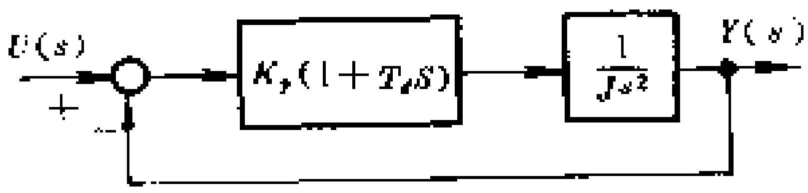


图 3-6 带惯性负载的 PD 控制方块图

由于微分控制只对偏差信号 $e(t)$ 的瞬态变化有作用，所以一般不能单独使用. 另外微分控制对噪声比较敏感，有放大作用，使用时必须注意.

作为常规调节仪表，通常把比例-积分-微分组合在一起构成所谓 PID 调节器. 这样有 K_p, T_i, T_d 三个参数可以调节，根据不同需要，选择不同数值以获得不同的功能.

〔例 1〕设有一上摆，安装在马达传动车上，如图 3-7 所示. 这实际上是一个空间助推器起飞的姿态控制模型. 姿态控制的目的，是保持空间助推器于垂直位置. 在我们现在所讨论的问题中，我们要将摆保持在垂直位置上. 但是不加控制的空间助推器(或本例题

中的上摆)是不稳定的. 并且于任何瞬间可能向任何方向倾倒.

在本例题中,我们只考虑二维问题,即认为摆只在图 3-7 所示的图面上运动. 为了保持上摆位于垂直位置,假设我们连续地测量 θ 和 $\dot{\theta}$,并利用比例—加—微分控制器产生反馈控制推力 u_b,即

$$u_b = M(a\theta + b\dot{\theta})$$

假设在摆轴上和车轮轴上无摩擦,并且假设 θ 和 $\dot{\theta}$ 很小,试确定当扰动 N 存在时,能使上摆稳定地保持在垂直位置的 a、b 取值.

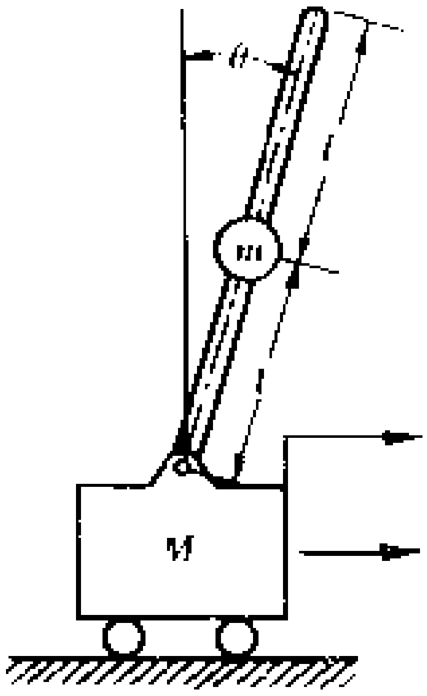


图 3-7 安装在马达传动车上的上摆

〔解〕整个力学系统的运动是两种运动的复合:上摆绕固定轴转动和整个系统沿 x 轴的平动. 注意到 θ, $\dot{\theta}$ 很小,所以 $\sin\theta\approx\theta$, $\cos\theta\approx 1$. 上摆的定轴转动方程为

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} = mgl\theta - ml\ddot{x} \tag{A1}$$

式中 $\frac{4}{3}ml^2$ 为上摆对端点的转动惯量. $mgl\theta$ 为重力矩, $-ml\ddot{x}$ 为上摆对小车运动的惯性力矩(小车的加速度为 $\ddot{x}$). 整个系统沿 x 轴平动方程为

$$ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} + M\ddot{x} = N + u_b \tag{A2}$$

已知

$$u_b = M(a\theta + b\dot{\theta}) \tag{A3}$$

由(A1)和(A2)两式消去 x,并考虑(A3),可得

$$-\frac{l}{3}(m + 4M)\ddot{\theta} + (m + M)g\theta = N + u_b \tag{A4}$$

对上式作拉普拉斯变换,可得

$$-\frac{l}{3}(m+4M)s^2\Theta(s)+(m+M)g\Theta(s)=N(s)+U_b(s)$$

于是系统的前向传递函数为

$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{N(s)+U_b(s)}=\frac{1}{-\frac{l}{3}(m+4M)s^2+(m+M)g} \tag{A5}$$

其方块图如图 3-8

于是不难得到

$$\Theta=\frac{-\frac{3}{(m+4M)l}}{s^2+\frac{3Mb}{(m+4M)l}s+\frac{3[Ma-(m+M)g]}{(m+4M)l}}N(s) \tag{A6}$$

可见，当 $b>0, a>(1+m/M)g$ 时，系统为二阶阻尼振荡系统，对于单位阶跃扰动，能够保持稳定.

以上给出了比例、积分、微分调节器的工作原理. 目前大多数工业控制系统是通过仪表来实现的。其中 *PID* 调节器由电子元件构成.

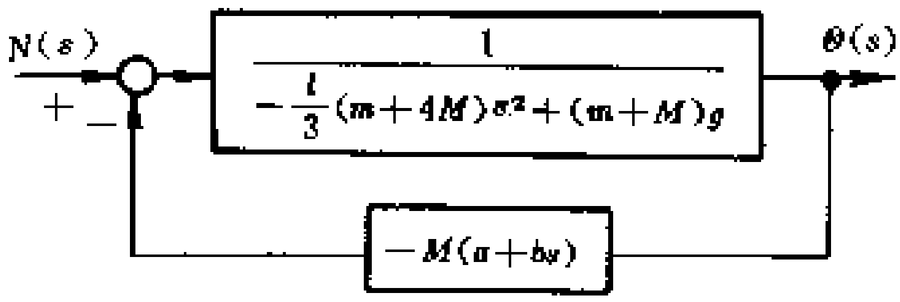


图 3-8　上摆的方块图

在一些特殊场合，如防火要求较严格的现场，也可以用气动元件或者其他元件来实现. 如果控制系统由电子数字计算机(或单片微机)构成，那么这些运算只需要一个简单的软件实现所需要的比例、积分、微分运算就能完成.

§4　反馈系统的稳态伺服特性

前面已经多次提及系统的偏差函数和稳态偏差. 偏差函数是反馈控制系统伺服特性的一种量度，而稳态偏差则反映系统的稳态伺服特性. 现在将在一般意义上研究稳态偏差与传递函数和输入函数的关系.

一、稳态偏差系数

1. 稳态偏差表达式　设反馈系统如图 4-1 所示. 根据本章§2 的讨论结果，系统的闭环传递函数为

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{4.1}$$

偏差函数为

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}U(s) \tag{4.2}$$

按照拉普拉斯变换的终值定理，系统的稳态偏差可写为

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}\frac{sU(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{4.3}$$

e_{ss}有时形象地写作 $e(\infty)$. 上式表明，稳态偏差同时取决于反馈系统的开环传递函数和输入函数两个因素.

2. 输入函数的阶　注意到一般的输入变量常常可以看成由幂函数的线性组合构成，为了简化稳态偏差的讨论，集中研究幂函数输入情形，设

$$u(t)=\frac{t^m}{m!} \tag{4.4}$$

于是

$$U(s)=\frac{1}{s^{m+1}} \tag{4.5}$$

m 称为输入函数的阶. 阶数越高的输入函数随时间变化越快.

3. **稳态偏差系数** 反馈系统跟踪不同阶的输入函数的能力决定系统的伺服特性. 将式(4.5)代入式(4.3), 可将系统跟踪 m 阶输入变量的稳态偏差写为

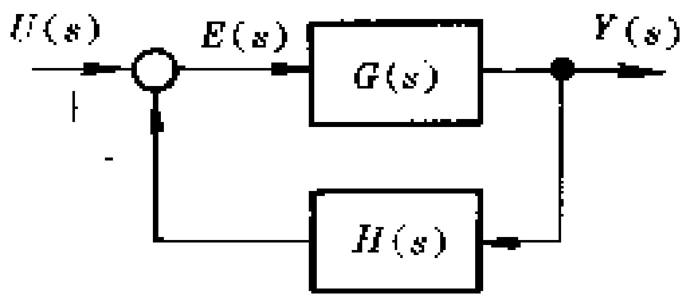


图 4-1 反馈控制系统

$$e_{sm} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^m + G(s)H(s)s^m} \qquad (4.6)$$

定义

$$K_m = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)s^m \qquad (4.7)$$

为系统的 m 阶稳态偏差系数. 反馈系统的 m 阶稳态偏差 e_{sm} 取决于相应的偏差系数. 对于零阶输入, 式(4.6)变为

$$e_{s0} = \frac{1}{1+K_0} \qquad (4.8)$$

对于高于零阶的输入函数, 式(4.6)可写为

$$e_{sm} = \frac{1}{K_m} \quad (m \geq 1) \qquad (4.9)$$

二、稳态伺服特性

现在研究反馈系统的跟踪能力. 前面已指出, 系统的稳态偏差取决于偏差系数 K_m. 而式(4.7)又表明 K_m 和开环传递函数直接相关. 假定系统的开环传递函数可以写成

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots(T_v s + 1)}{s^r(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots(T_p s + 1)} \qquad (4.10)$$

K 为系统的开环增益, r 为所含积分环节的阶数, 则由式(4.7)有

$$K_m = \lim_{s\to 0} K s^{m-r} \qquad (4.11)$$

可见, 稳态偏差系数取决于 r, m 和 K 的不同取值. 以下分别加以讨论:

(1)当 $r \leqslant m-1$ 时

$$K_m = 0 \tag{4.12}$$

注意到由于 $r \geq 0$,条件 $r \leqslant m-1$ 只能导致 $m \geq 1$. 这时

$$e_{sm} = \infty \quad (m \geq 1) \tag{4.13}$$

(2)当 $r = m$ 时,

$$K_m = K \tag{4.14}$$

系统稳态偏差系数等于系统的开环增益. 这时相应的稳态偏差为

$$e_{sm} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+K} & (m = 0) \\ \dfrac{1}{K} & (m \geq 1) \end{cases} \tag{4.15}$$

(3)当 $r \geq m+1$ 时,

$$K_m = \infty \tag{4.16}$$

于是

$$e_{sm} = 0 \quad (m = 0, 1, \cdots) \tag{4.17}$$

将式(4.12)—(4.17)所表示的关系综合起来,列为表 4.1.

根据表 4.1 得到的结论如下.

表 4.1　不同型号系统的稳态偏差

e_{ss} \ m / r	0 阶跃输入	1 斜坡输入	2 抛物线输入
0	$\frac{1}{1-K}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K}$
3	0	0	0

(3)以后的讨论表明，由于稳定性的要求，稳定的反馈系统，其开环传递函数包含的积分环节阶数一般不得大于二阶.

因此，线性定常系统通过反馈实现伺服控制的跟踪能力是有限的. 提高系统的稳定性和降低稳态偏差存在着一定的矛盾. 这是控制系统设计时需要折衷的因素.

§5　频率特性

前面比较清楚地讨论了一阶系统和二阶系统在幂函数输入下的过渡响应. 但是对于比较复杂的系统，理论描述上仍不具体. 为了深入讨论比较复杂系统的行为，首先研究不同频率的正弦输入下系统的响应特性.

一、频率响应和频率特性

1. **频率响应**　如图 5-1 所示，在传递函数为 $G(s)$ 的系统上加入正弦输入信号，现在来求系统输出的稳态值.

设 $u(t)=U_0\sin\omega t$，则 $U(s)=U_0\omega/(s^2+\omega^2)$. 于是 $Y(s)$ 可表示如下：

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{U_0\omega}{s^2+\omega^2}G(s) \tag{5.1}$$

假定 $G(s)$ 的所有极点是互不相同的单极点 $s_i(i=1,2,\cdots,n)$，并且其实部全为负. 这时 $Y(s)$ 所含的 $(n+2)$ 个极点为 s_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $\pm j\omega$. 把式(5.1)进行拉普拉斯反变换，可得到

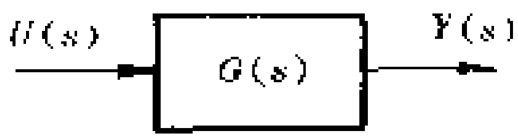


图 5-1　一个正弦输入的系统

$$y(t)=U_0\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(s-s_i)\omega G(s)}{s^2+\omega^2}\right]_{s=s_i}e^{s_it}+\frac{G(j\omega)}{2j}e^{j\omega t}-\frac{G(-j\omega)}{2j}e^{-j\omega t}\right\} \tag{5.2}$$

由于 s_i 的实部为负，所以 $t\to\infty$ 时，式(5.2)右端中所有包含 e^{s_it} 的项变为 0. 由于 $G(j\omega)$ 和 $G(-j\omega)$ 是共轭复数，即有

$$|G(j\omega)|=|G(-j\omega)|,\ \angle G(j\omega)=-\angle G(-j\omega)$$

于是 $Y(t)$ 的稳态值可求得如下：

$$\begin{aligned}y(t)&=U_0\left[\frac{G(j\omega)}{2j}e^{j\omega t}-\frac{G(-j\omega)}{2j}e^{-j\omega t}\right]\\&=U_0|G(j\omega)|\left\{\frac{e^{j(\omega t+\angle G(j\omega))}-e^{-j(\omega t+\angle G(j\omega))}}{2j}\right\}\\&=U_0|G(j\omega)|\sin[\omega t+\angle G(j\omega)]\end{aligned} \tag{5.3}$$

上面的推导是假定 $G(s)$ 具有各不相同的单极点作出的. 事实上对于存在多重极点的情形，结果也一样.

式(5.3)表明，当一个正弦信号输入线性系统之后，其输出仍然是同频率的正弦信号. 不过振幅和相位发生了变化，如图 5-2 所

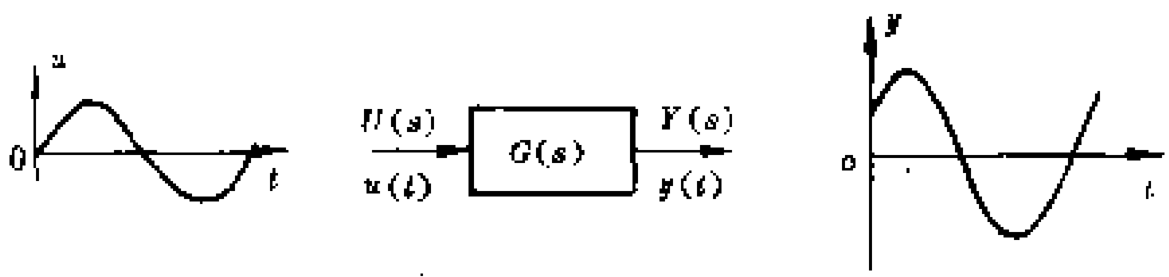


图 5-2　正弦信号的稳态响应

示. 并且,不同频率的正弦信号通过系统 $G(s)$之后,振幅和相位所发生的变化也不同. 假如输入信号的振幅都为 U_0,初相都为零,即

$$A_u = U_0;\quad \varphi_u = 0 \tag{5.4}$$

上述关系如图 5-3 左侧所示. 这时,根据式(5.3),输出的振幅和初相都是的 ω 函数:

$$\begin{aligned} A_y(\omega) &= U_0|G(j\omega)|; \\ \varphi_y(\omega) &= \angle\varphi(j\omega) \end{aligned} \tag{5.5}$$

这种变化示于图 5-3 的右侧. 系统稳态输出的振幅和初相随输入信号的频率而改变,这类过程称为系统的**频率响应**.

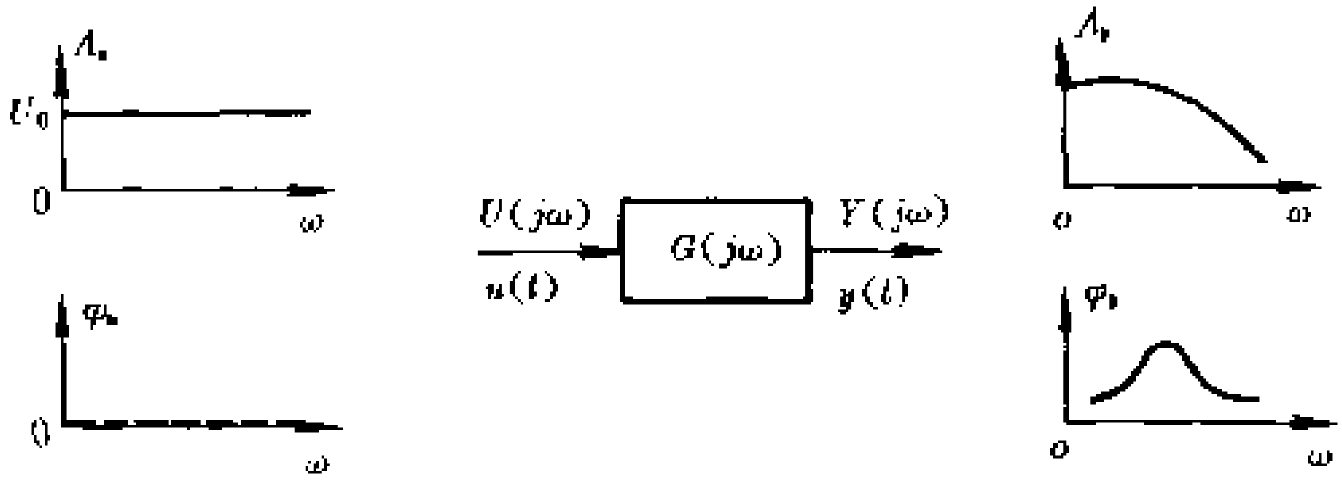


图 5-3　系统的频率响应

系统的频率响应输出和输入信号的振幅之比描述系统频率响应的**振幅特性**;输出和输入信号的相位差描述系统频率响应的相位特性. 由式(5.4)和(5.5),它们分别为

$$\frac{A_u}{A_y} = |G(j\omega)|;\quad \varphi_y - \varphi_u = \angle G(j\omega) \tag{5.6}$$

可以看出,系统的频率响应,无论是振幅特性还是相位特性都取决于系统本身,而与输入信号无关. 只要给定传递函数 $G(s)$,就可求 $G(j\omega)$. 不难看出:函数 $G(j\omega)$的幅值 $|G(j\omega)|$就是系统的**振幅特性**,而其辐角$\angle G(j\omega)$就是系统的**相位特性**. 于是,函数 $G(j\omega)$本身则总称为系统的**频率特性**.

2. **频率特性的数学关系**　如前所述,从直接的数学关系看,

将传递函数 $G(s)$ 的复数自变量 s 由纯虚数 $j\omega$ 来代替就得到系统的频率特性. 设 $g(t)$ 是 $G(s)$ 的原函数，那么根据拉普拉斯变换的定义有

$$G(j\omega) = \int_0^\infty g(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{5.7}$$

如果当 $t<0$ 时，$g(t)\equiv 0$，则上式可写为

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^\infty g(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{5.8}$$

因此，从形式上看，频率特性 $G(j\omega)$ 就是函数 $g(t)$ 的付立叶变换. 但是这个断言是有条件的. 也就是只当原函数 $g(t)$ 满足狄利赫利条件使付立叶变换存在时才成立. 由于拉普拉斯变换成立的条件比付立叶变换要求弱得多，所以在数学关系上，$G(j\omega)$ 是 $G(s)$ 的一种派生表示，即由 $j\omega$ 代替 s 的结果. 如果把 $G(j\omega)$ 看作 $g(t)$ 的付立叶变换，则在物理上会更清晰一些. 下面将作进一步的说明.

总之，$G(s)$ 和 $G(j\omega)$ 两者是孪生函数. 虽然频率特性的概念是通过正弦输入的稳态输出的讨论引入的，但是 $G(j\omega)$ 与 $G(s)$ 的相互关系表明，频率特性是描写系统的.

3. **信号频谱的传递** 由于系统 $G(s)$ 的输入和输出在复频域的数学关系一般有

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

对上式两边作代换 $s=j\omega$，得

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega) \tag{5.9}$$

类似于前面的讨论可知，在满足狄利赫利条件下，$Y(j\omega)$ 和 $U(j\omega)$ 可分别看作 $y(t)$ 和 $u(t)$ 的付立叶变换，即

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^\infty y(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{5.10}$$

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^\infty u(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{5.11}$$

为了和拉普拉斯变换象函数一致，上式也假定了 $y(t)$ 和 $u(t)$

在 $t<0$ 时恒为零. 根据付立叶变换的含义,$Y(j\omega)$和 $U(j\omega)$分别是输出信号和输入信号的付立叶频谱. 注意到

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)|\exp\{j\angle Y(j\omega)\};$$
$$U(j\omega) = |U(j\omega)|\exp\{j\angle U(j\omega)\}$$

它们的振幅频谱和相位频谱分别为

$$A_u(\omega) = |U(j\omega)|;\varphi_u(\omega) = \angle U(j\omega) \tag{5.12}$$

以及

$$A_y(\omega) = |Y(j\omega)|;\varphi_y(\omega) = \angle Y(j\omega) \tag{5.13}$$

图 5-3 正好描述了信号频谱的这种传递过程. 而式(5.9)则表示频率特性 $G(j\omega)$是描写信号付立叶频谱的传递函数. 这就是频率特性的物理意义.

二、频率特性函数的几何表示

1. **映射** 复数变量是由实部和虚部两个独立的实变量构成. 它表示复平面上的一个动点. 如果复变量 w 和复变量 z 具有某种对应关系,在一定邻域内,任意给定一个 z 值,就能有一个 w 值与之对应,则称 w 是 z 的复变函数,记作 $w=F(z)$. z 和 w 都可用各自的复平面上的动点来表示. 为区别起见,将自变量平面称作 z 平面,因变量平面称作 w 平面. 那么,根据复变函数的定义,z 平面上给定一个点就有 w 平面上一个点与之对应,z 平面上动点所描画出来的曲线也必有 w 平面的曲线与之对应. 这种对应关系取决于复变函数 $F(z)$的具体形式. 两个复平面的这种对应关系称为复变函数 $w=F(z)$所构成的映射.

反馈控制理论中所研究的传递函数 $G(s)$也是一个复变函数. 这种关系可以写成

$$G = G(s) \tag{5.14}$$

它将复数自变量 s 所在平面上的点或曲线映射为 G 平面上的点或曲线. 复数自变量 s 一般写成形式

$$s = \sigma + j\omega \tag{5.15}$$

实部 σ 表示衰减系数，虚部 ω 表示频率. 而 s 则称为复频率.

s 平面的虚轴是一条特殊直线. 它的直线方程为

$$\sigma = 0 \tag{5.16}$$

如果注意到式(5.15)，那么它等价于

$$s = j\omega \tag{5.17}$$

因此，由式(5.14)所示的复变函数对 s 平面虚轴的映射将由

$$G = G(j\omega) \tag{5.18}$$

来决定. 上式右边正好是频率特性函数. 所以频率特性函数 $G(j\omega)$ 在 G 平面上所描画的曲线就是传递函数 $G(s)$ 对 s 平面虚轴的映射. 由于平面上的点也可以用平面向量来表示，$G(j\omega)$ 在 G 平面上所画的曲线也称为**矢端轨迹图**.

如果 G 平面用直角坐标表示：

$$G = u + jv \tag{5.19}$$

考虑式(5.18)，显然

$$u = \mathrm{Re}[G(j\omega)];v = \mathrm{Im}[G(j\omega)] \tag{5.20}$$

这就是 G 平面上频率特性曲线在直角坐标下的参数方程. $\omega \in (-\infty, +\infty)$ 是方程的参数.

2. 复平面上频率特性曲线的特点 一般的线性定常系统，传递函数是有理分式

$$G(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0} \quad (n \geqslant m) \tag{5.21}$$

以上述分式为传递函数的频率特性曲线 $G(j\omega)$ 有如下特点：

(1)一般情况下 $G(s)$ 是有理真分式，即 $n>m$. 这时有

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = 0 \tag{5.22}$$

也有

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} G(j\omega) = 0 \tag{5.23}$$

上式表明，当动点沿虚轴正负两个方向无限延伸时，在 G 平面的

映射曲线 $G(j\omega)$ 将在原点相接.(如果 $n=m$,则有 $\lim\limits_{s\to\infty}G(s)=a_m$,映射曲线 $G(j\omega)$ 也将相接于实轴 $u=a_m$ 处.

(2)如果 $b_0\neq 0$,则 $\lim\limits_{s\to 0}G(s)=a_0/b_0$,这是实数;如果 $b_0=0$,则 $\lim\limits_{s\to 0}G(s)=\infty$.这说明 s 平面的原点或者被映射为 G 平面实轴上的一点,或者是 $G(s)$ 的一个极点而被映射为无穷远.

(3)对于式(5.21)进行分解因式,假定可得

$$G(s)=\frac{a_m(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)} \tag{5.24}$$

考虑到分式(5.21)中分母多项式和分子多项式的系数都为实数时,如有复根(包括零点和极点),则成对出现,并且实根的共轭为其自身,故

$$\begin{aligned}G^*(s)&=\frac{a_m(s^*+z_1^*)\cdots(s^*+z_m^*)}{(s^*+p_1^*)\cdots(s^*+p_n^*)}\\&=\frac{a_m(s^*+z_1)\cdots(s^*+z_m)}{(s^*+p_1)\cdots(s^*+p_n)}=G(s^*)\end{aligned}$$

当 $s=j\omega$ 时,$s^*=-j\omega$,于是

$$G^*(j\omega)=G(-j\omega) \tag{5.25}$$

注意到式(5.19),上式可改写为

$$u(\omega)-jv(\omega)=u(-\omega)+jv(-\omega)$$

于是

$$u(\omega)=u(-\omega);\quad v(\omega)=-v(-\omega) \tag{5.26}$$

根据参数方程(5.20),上式意味着频率特性曲线 $G(j\omega)$ 关于实轴对称.

3. **$G(j\omega)$ 复平面轨迹作图** 原则上,按照式(5.20)代入每个 ω 值便可逐点作出 $G(j\omega)$ 的轨迹.然而前面关于 $G(j\omega)$ 轨迹特点的讨论可使作图程序简化.首先,由于 $G(j\omega)$ 轨迹关于实轴的对称性,我们只需具体画出 $\omega\in(0,\infty)$ 半枝,另半枝可根据对实轴的对称性画出.其次,我们还知道了当 ω 从零趋向无穷大时,$G(j\omega)$ 轨

迹的去向是从实轴某点或从无穷远处走向原点.

有些实际问题并不需要非常细致地描画出每个点的坐标. 这时可以根据参数方程(5.20),令 $v=0$ 或者 $u=0$,分别求出曲线,分别与实轴和虚轴的交点,就可勾画出大致的形状.

〔例 1〕设

$$G(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

式中 $K=25, T_1=1/4, T_2=1/16$,求 $G(j\omega)$ 在 G 平面上的轨迹.

由于

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(jT_1\omega+1)(jT_2\omega+1)}$$

$$=\frac{-(T_1+T_2)\omega+j(T_1T_2\omega^2-1)}{\omega(\omega^2T_1^2+1)(\omega^2T_2^2+1)}K$$

令虚部为零,可得与实轴交点处 ω 之值为

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}=8$$

于是

$$u(\omega_1)=Re[G(j\omega_1)]=-1.25;$$

$$v(\omega_1)=0$$

由于 $\omega=0$ 时,$G(j\omega)\to\infty$,本例的频率特性曲线来自无穷远处,交实轴于 $u=-1.25$,最后趋向原点,如图 5-4 所示. 虚线表示 $\omega=-\infty\to0$ 的另半枝.

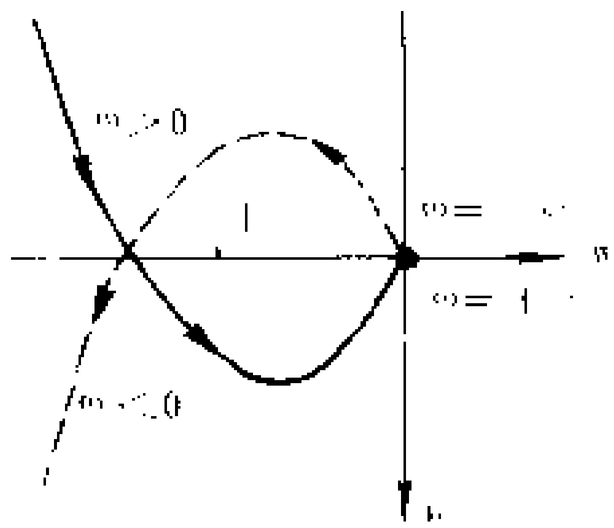


图 5-4　乃奎斯特曲线的对称性

三、对数频率特性图

如果将式(5.19)改成极坐标形式:

$$G=Ae^{j\varphi} \tag{5.27}$$

由于

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \tag{5.28}$$

有

$$A = |G(j\omega)|; \quad \varphi = \angle G(j\omega) \tag{5.29}$$

根据上一小节的讨论，式(5.29)具有清晰的物理含义：第一式表示振幅特性；第二式表示相位特性.

为了直观上明确掌握在很宽范围内的频率特性，振幅特性和相位特性分别用图形表示出来是有特殊意义的. 经典控制理论非常重视这种图形表示. 当理论上不能直接求得传递函数的解析表达式而只能根据实验数据分别确定振幅特性以及相位特性的数值关系时，尤其如此.

对数频率特性图是最常用的图形表示之一，也称为**波德**(Bode)**图**. 这时，振幅特性要改用对数来表示，也称为**增益特性**，单位是分贝(db). 式(5.29)改写为

$$\left.\begin{aligned} g &= 20\log_{10}|G(j\omega)| \quad (\text{分贝}) \\ \varphi &= \angle G(j\omega) \quad (\text{度}) \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

为了能包括极宽的频率范围，横轴采用了对数刻度. 也就是采用横轴对数刻度、纵轴线性刻度的半对数的方格纸，在横轴上标 ω，在纵轴上标 $g=20\log_{10}|G(j\omega)|$ 和 $\varphi=\angle G(j\omega)$. 令 ω 变化，画出的增益和相位的两条曲线就是对数频率特性图. 因而，横轴的实际长度是 $\log_{10}\omega$，频率 ω 变化 10 倍的区间叫做 1 个 10 倍频程(1 decade 或简写为 1 dec)，ω 变化 1 倍的区间叫做 1 个倍频程，把它们作为频率变化的单位. 普通采用 10 倍频程作为频率变化单位为多.

1. **基本环节对数频率特性图** 以下举例说明.

〔例 2〕试画出积分环节 $G(s)=1/s$ 的对数频率特性图.

〔解〕由于

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

所以增益为

$$g = 20\log_{10}\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -\ 20\log_{10}\omega$$

相位为

$$\varphi = -\ 90^\circ$$

增益特性的斜率为－20 分贝/10 倍频．对数频率特性如图 5-5(a)所示．

对于微分环节 $G(s)=s$，其增益特性为 $g=+20\log_{10}\omega$．这在波德图上表现为一条斜率为＋20db/10dec 的直线．而相位特性则为 $\varphi=+\pi/2$，如图 5-5(b)所示．

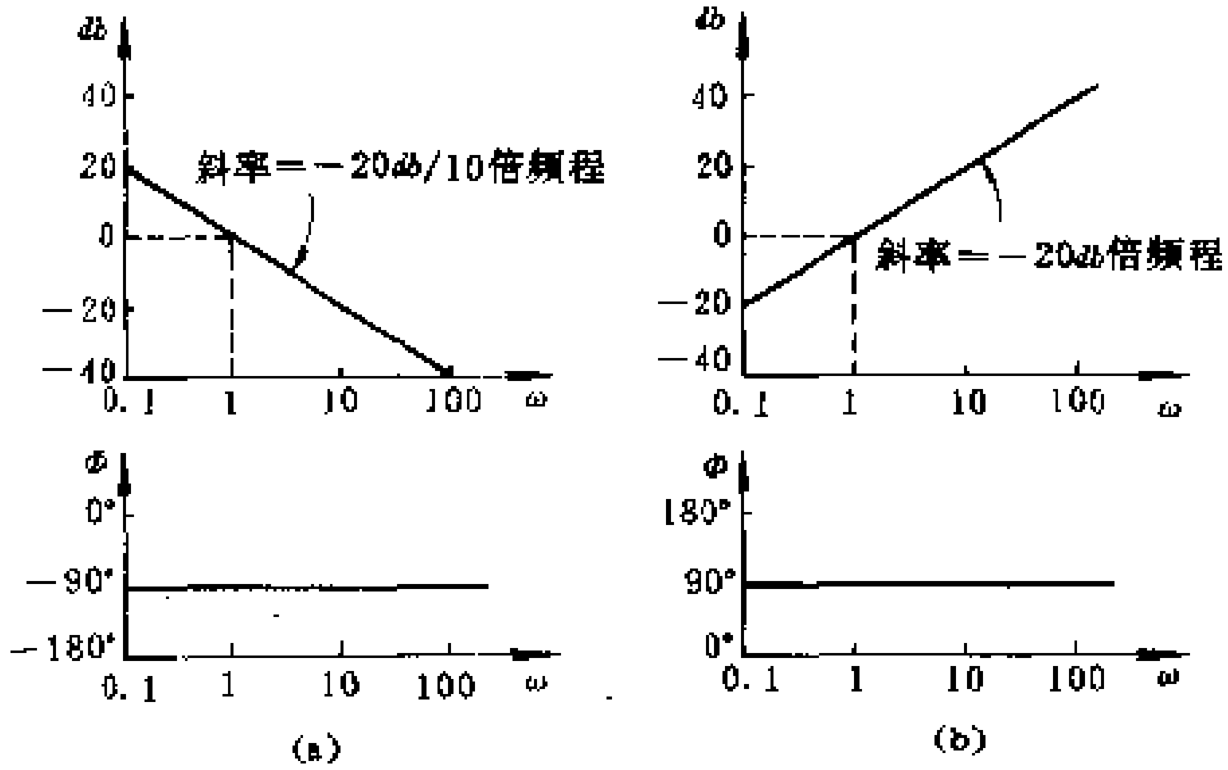


图 5-5 (a)积分环节的频率特性； (b)微分环节的频率特性

〔例 3〕画出一阶惯性环 $G(s)=K/(Ts+1)$的对数频率特性图．

〔解〕由于

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega t} = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 - 1}}e^{-j\omega T}$$

增益为

$$g = 20\log_{10}\frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} = 20\log_{10}K - 10\log_{10}|(\omega T)^2 + 1|$$

相位

$$\varphi = \text{arctg}(-\omega T)$$

对数频率特性如图 5-6 所示.

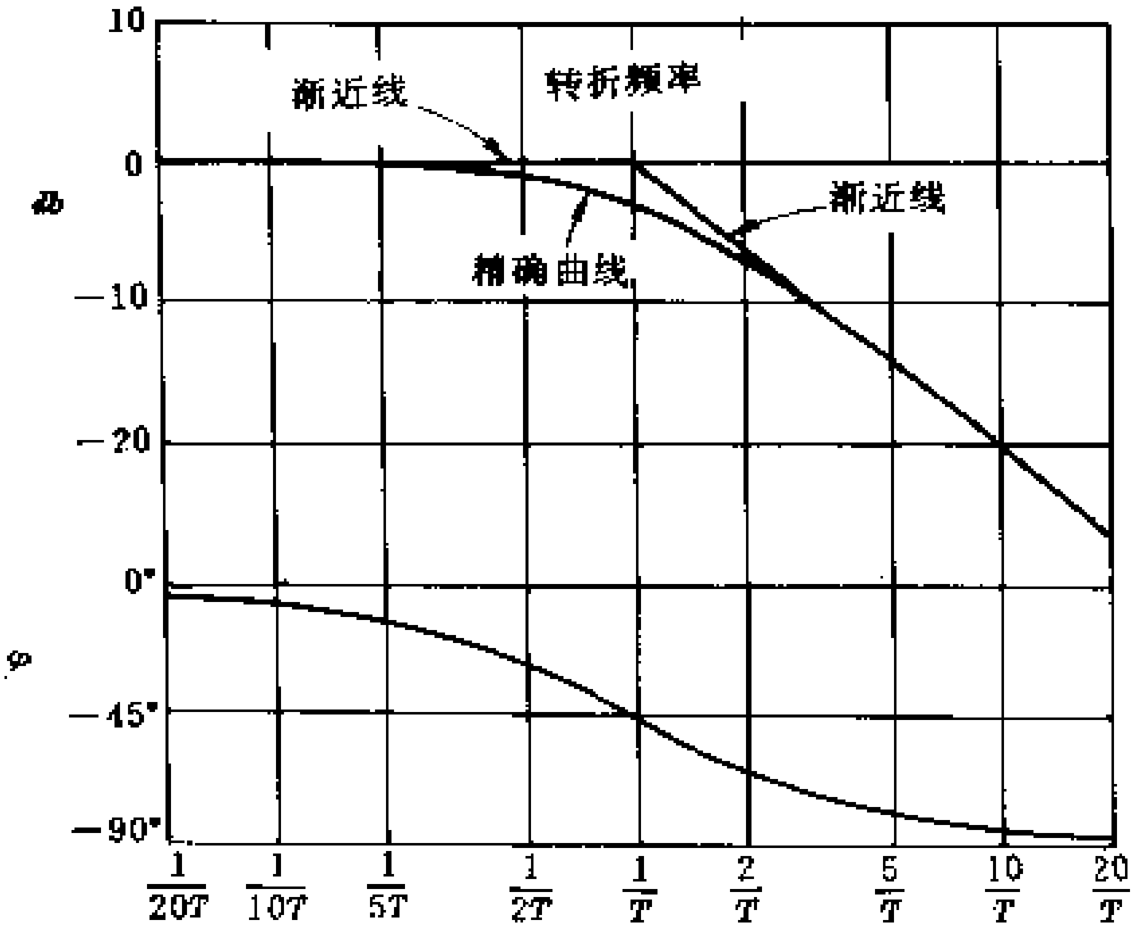


图 5-6 一阶环节的对数频率特性图

从本例可知,画对数频率特性图时,一般必须进行具体的数值计算.但是,对增益特性可用下面的近似画法.例如,$G(j\omega)=K/(j\omega T+1)$的增益特性为

$$g = 20\log_{10}K - 10\log_{10}|(\omega T)^2 + 1|$$

根据频率的大小,可把这个特性图分为两部分.即

当 $\omega T \ll 1$(或 $\omega \ll 1/T$)时

$$g \approx 20\log_{10}K - 10\log_{10}|1| = 20\log_{10}K \tag{5.31}$$

当 $\omega T \gg 1$(或 $\omega \gg 1/T$)时

$$g \approx 20\log_{10}K - 10\log_{10}|(\omega T)^2| = 20\log_{10}K - 20\log_{10}|\omega T| \tag{5.32}$$

式(5.31)表示,ω 很小时增益为 $20\log_{10}K$(分贝),与 ω 无关.式(5.32)表示,ω 很大时增益以 20 分贝/10 倍频程的比例减小.由

此可知，在这两个频率范围内，增益特性可以分别用两条直线来近似. 但在 $\omega T\approx 1$（或 $\omega\approx 1/T$）附近，不存在这种近似性. 当用上面所说的两条直线来近似增益特性时，在 $\omega T=1$ 附近会产生较大的误差（约 6db）. 然而，由于这个近似方法在作图时非常简单，并可以表示增益特性的整体的变化趋势，所以被广泛地采用. 这个方法叫做增益特性的折线近似. 而 $\omega T=1$ 或 $\omega=1/T$ 的点称为转折点，所具有的频率叫**转折频率**. 另一方面，相位特性曲线在 ω 很大的范围内是弯曲的，因此没有增益特性曲线那样的折线近似. 不过应当指出，对于转折点 $\omega T=1$ 时，相位滞后 45°；$\omega T\gg 1$，相位滞后趋近 90°；只当 $\omega T\ll 1$ 时，相位才没有滞后. 对于积分环节，则相位恒定滞后 90°. 图 5-6 所示的是 $K=1$ 情形.

对于另一类一阶环节：

$$G(s)=Ts+1$$

频率特性为：

$$\begin{aligned}G(j\omega)&=j\omega T+1\\&=\sqrt{(\omega T)^2+1}\,e^{j\omega T}\end{aligned}$$

可以看出，它的对数频率特性图和一阶惯性环节不同的是：它的增益特性曲线过了转折点以后，以 20 分贝/10 倍频程的斜率上升；而相位特性则随 ω 增大而从 0°变到 +90°，相位超前. 如图 5-7 所

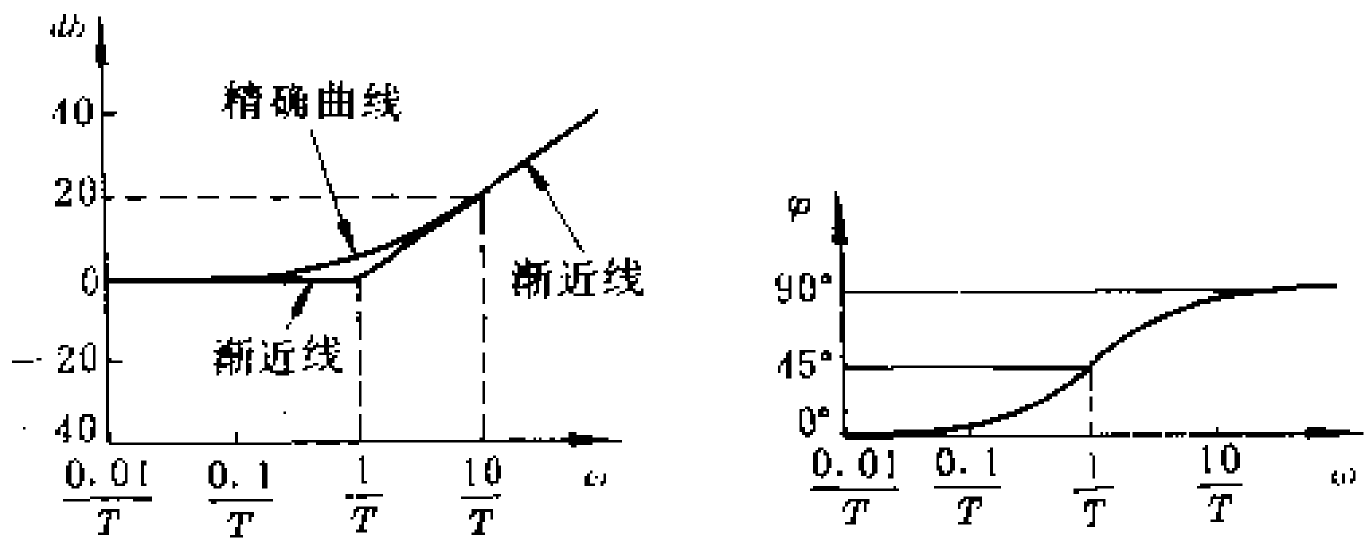


图 5-7　环节 $Ts+1$ 的对数频率特性

示.

〔例 4〕对于二阶环节：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

其对数频率特性图如图 5-8 所示.

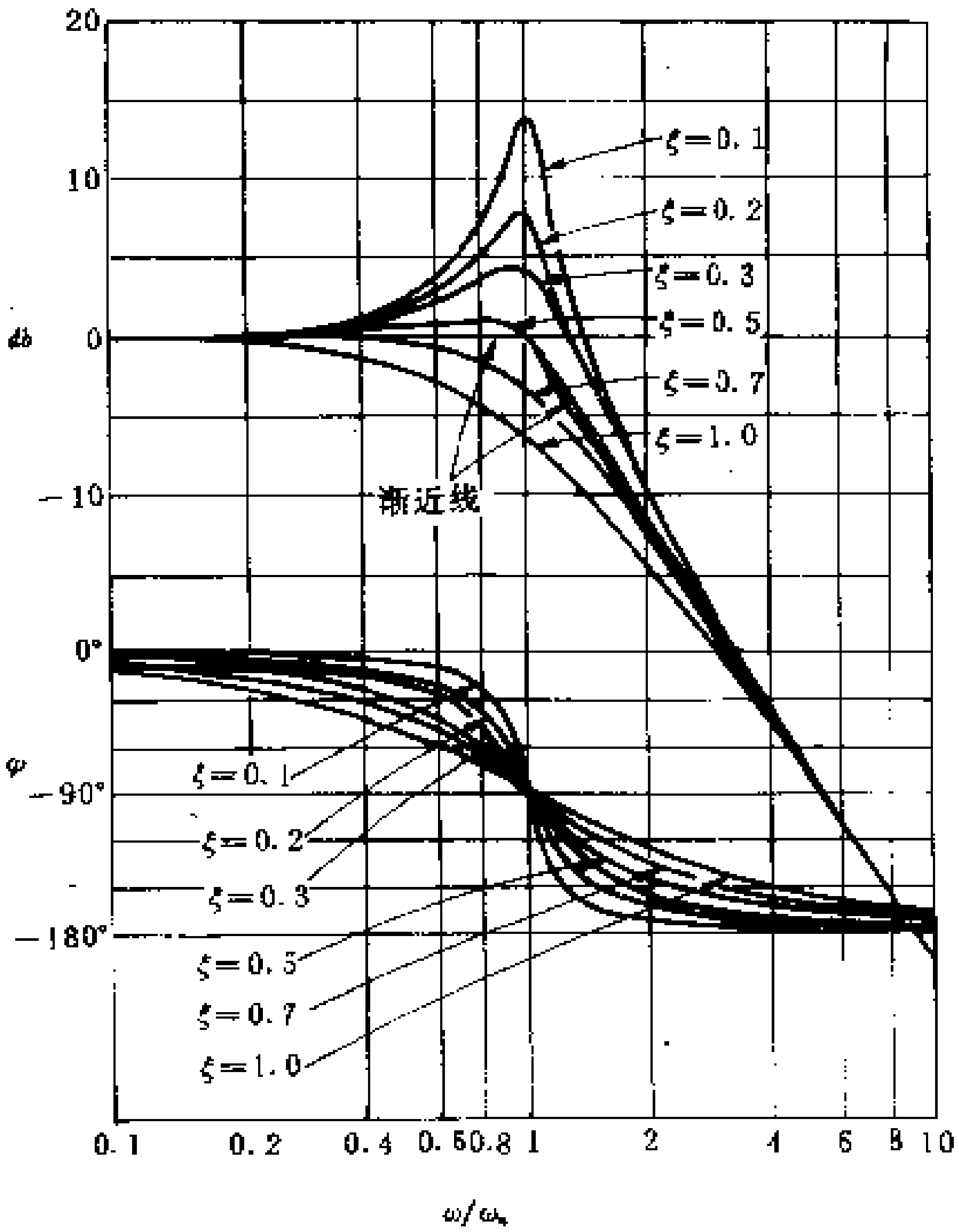


图 5-8　二阶环节的对数频率特性图

可以看出，对于如题设所表示的规范的二阶系统，当 $\omega/\omega_n \ll 1$ 时，增益趋于常数值（为零分贝）；当 $\omega/\omega_n \gg 1$ 时，增益特性曲线以 40 分贝/10 倍频程的斜率减小. 其斜率是一阶环节的两倍. 当 $\omega/$

$\omega_n=1$ 时，增益随比阻尼 ξ 的减小而增大，将会和折线近似产生非常大的偏离. 只当 ξ 接近于 1 时，这种偏离才不至于太大. 从相位特性看，当 $\omega/\omega_n\ll1$ 时，$\varphi\approx0°$；$\omega/\omega_n=1$ 时，$\varphi=-90°$；$\omega/\omega_n\gg1$ 时，$\varphi=-180°$. 只有在转折点和极限情形，φ 值是确定的，而且都是一阶系统的两倍. 至于整个相位特性曲线的中间过程不象增益特性那样可以进行折线近似，而必须逐点计算.

上述讨论是特别针对 $\xi<1$ 的情形而言的. 当 $\xi\geq1$ 时，则如本章 §1 的讨论所指出，系统可以当成两个一阶环节的串联来处理.

总之，对于基本环节的近似作图应当注意以下几个要点：(1) 环节的低频增益和低频端相位特性曲线极限值；(2) 环节的阶数，它确定高频区渐近线的斜率和相位特性的高频极限；(3) 转折点. 这样就能方便地画出增益特性的折线近似和相位特性的大致形状.

2. 串联环节的折线作图法 如果系统由 n 个环节串联而成：

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s) \tag{5.33}$$

则它的频率特性可写成

$$G(j\omega)=|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|\cdots|G_n(j\omega)|e^{j(\angle G_1(j\omega)+\angle G_2(j\omega)+\cdots+\angle G_n(j\omega))} \tag{5.34}$$

因此，

$$|G(j\omega)|=|G_1(j\omega)|\cdot|G_2(j\omega)|\cdot|\cdots\cdot|G_n(j\omega)| \tag{5.35}$$

$$\angle G(j\omega)=\angle G_1(j\omega)+\angle G_2(j\omega)+\cdots+\angle G_n(j\omega) \tag{5.36}$$

式(5.35)的对数频率特性表示则为

$$\begin{aligned} g=&\ 20\log_{10}|G_1(j\omega)| \\ &+20\log_{10}|G_2(j\omega)|+\cdots+20\log_{10}|G_n(j\omega)| \end{aligned} \tag{5.37}$$

由式(5.37)和(5.36)可以看出，串联环节所构成的系统的增益特性与相位特性可以分别表示成各环节的增益特性之和与相位特性

之和.

〔例 5〕设

$$G_1(s) = \frac{2}{5s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+5}$$

求 $G(s)=G_1(s)G_2(s)$ 的增益特性的折线近似.

〔解〕在低频端($\omega\to 0$),显然有

$$\lim_{\omega\to 0}|G_1(j\omega)| = 2; \qquad \lim_{\omega\to 0}|G_2(j\omega)| = \frac{1}{5}$$

或用增益表示:

$$g_1 = 20\log_{10}2 = 6(\text{分贝}); \quad g_2 = 20\log_{10}\left(\frac{1}{5}\right) = -14(\text{分贝})$$

在高频端,由于 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 都是一阶惯性环节,因此都以 20 分贝 /10 倍频程的斜率下降.它的转折点分别为 $\omega=0.2$ 和 $\omega=5$.图 5-9 画出了每一条近似折线.整个系统的近似折线则应是两者的迭加.根据式(5.37),低频端的系统的总增益为

$$g = g_1 + g_2 = -8\ \text{分贝}$$

当 $\omega<0.2$ 时折线以 -8 分贝的增益画出一段平行于横轴的直线;从 $\omega=0.2$ 时起,折线以 20 分贝/10 倍频程的斜率下降;而到达第二个转折点 $\omega=5$ 之后折线则以 40 分贝/10 倍频程的斜率下降.系统的近似折线在图 5-9 中以虚线表示.

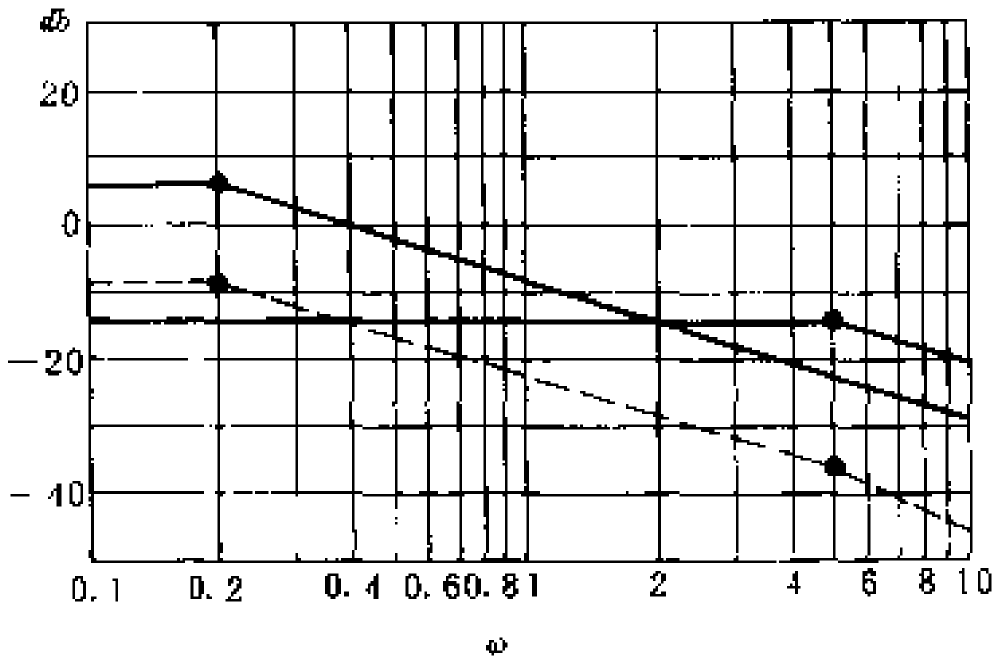


图 5-9 环节串联折线作图

§6 线性反馈控制系统的稳定性判据

一、控制系统稳定性的提法

对于不同类型的控制系统，稳定性问题有不同的提法．本节着重讨论线性定常系统的稳定性．通常把稳定性问题分为绝对稳定性和相对稳定性两个方面去讨论．前者是对问题进行定性研究，讨论用什么方法去判别系统是稳定的还是不稳定的．对于一个被判定是稳定的控制系统还需对其稳定程度进行定量研究．这就是所谓相对稳定性问题．我们把这后一个问题放到下一节去讨论．

在力学中，人们研究过系统的平衡状态的稳定性，那是指当系统受到一个微小的扰动之后，在足够长的时间内系统能否回到平衡状态．

对于一个控制系统，如果也受到一个扰动．在扰动撤离充分长的时间之后，系统能够回到原来的控制状态或者扰动对控制系统行为的影响趋于零，则系统是稳定的．否则就是不稳定的．

对于传递函数为 $G(s)$ 的系统，假定所加的扰动可以用单位脉冲函数 $\delta(t)$ 来描写，我们以 $\delta(t)$ 为输入函数，研究系统在 $t\to\infty$ 时的行为，也就是系统的过渡响应．根据前面的讨论，单位脉冲的过渡响应就是传递函数 $G(s)$ 的拉普拉斯反变换：

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)] \tag{6.1}$$

如果系统有 n 个单极点 $(s_1,\cdots,s_n)$，即

$$G(s)=\frac{a_m s^m+\cdots+a_1 s+a_0}{(s-s_1)\cdots(s-s_n)} \tag{6.2}$$

则有

$$g(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i e^{s_i t} \tag{6.3}$$

其中

$$C_i = [(s - s_i)G(s)]_{s=s_i}$$

如果存在多重极点，假定 s_1 是 l 重极点，即

$$G(s) = \frac{a_m s^m + \cdots + a_1 s + a_0}{(s - s_1)^l (s - s_{l+1}) \cdots (s - s_n)} \tag{6.4}$$

则有

$$g(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{d_k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{s_1 t} + \sum_{i=l+1}^{n} C_i e^{s_i t} \tag{6.5}$$

由于 $\delta(t)$ 是在 $t=0$ 时短促作用的脉冲函数，瞬间作用之后即消失. 如果系统是稳定的，按前面的提法，它的过渡响应在 $t\to\infty$ 时趋于零. 即

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \tag{6.6}$$

否则系统就不稳定.

现在讨论什么条件下，式(6.6)才能得到满足. 由式(6.3)和(6.5)可知，如果 $G(s)$ 的全部极点 s_i 的实部都小于零，那么它们的每一项所含的指数部分在 $t\to\infty$ 时都趋于零，式(6.6)成立. 不过只要存在一个极点，其实部大于零，就会有 $g(t)\to\infty$. 如果存在实部等于零的极点，那么系统的 $g(t)$ 或者趋于不为零的常数，或者产生振幅为有限值的等幅振荡. 这是一种临界情形. 因此，线性定常系统稳定的充要条件可以归结为系统的传递函数的全部极点(也是系统的特征根)的实部小于零，或写成

$$\mathrm{Re}[s_i] < 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{6.7}$$

如果从几何角度来看，则式(6.7)表示系统的全部极点都位于 s 平面的左半平面上.

问题在于如何求出系统的极点. 由于三阶和高于三阶多项式分解因子的困难，在经典控制理论的发展过程中出现了各种方法去解决这个问题，并进一步判断系统的稳定性. 劳斯－胡尔维茨(Routh－Hurwitz)判据是利用特征多项式的系数判别根的正负的代数学方法. 乃奎斯特(Nyguist)判据则是一种利用开环传递函

数判断闭环系统稳定性的复变函数论方法. 由于后者可以方便地引伸出对反馈控制系统相对稳定性的定量表示，本节将予以重点讨论.

由于需要应用复变函数的围绕定理（或称辐角原理），为了便于理解，下面先对它作些说明. 严格的证明，读者可以阅读复变函数论方面的专门书籍.

二、复平面上闭合曲线映射的围绕定理

这里讨论复变函数 $w=F(s)$ 对平面上闭合曲线的映射问题，主要关心的是：(1)w 平面上的映射曲线（也是闭合曲线）是否包围原点；(2)包围的圈数；(3)包围的方向，也称围绕问题. 如果 s 平面上某个动点按顺时针方向沿着某条闭合曲线移动一周（为简便起见，后面的讨论在没有特别说明时都假定 s 平面上的闭合曲线是顺时针方向的），这时 w 平面上的动点沿着所映射的闭合曲线也按顺时针方向移动并且包围原点，则称映射曲线按顺时针方向围绕原点一周，则记作 $C=1$；如果反向围绕原点一周，则记作：$R=1$，或 $C=-1$. 这里有 $R=-C$，只是符号上的差异. 如果映射曲线不包围 w 平面的原点，$C=0$.

有理分式函数所实现的映射可能是顺向围绕，也可能是反向围绕. 围绕问题，实质上是和映射时两对应平面上幅角变化关系有关. 下面我们用列举法说明有理分式函数围绕问题的求法. 自变量采用

$$s=\sigma+j\omega$$

1. 顺向围绕

(1)平移　首先讨论一次幂函数

$$w=F(s)=s-s_0 \tag{6.8}$$

所实现的映射. w 平面上的映射曲线是 s 平面上的曲线的平移. s_0 称为函数 $F(s)$的零点. 在这个映射过程中，s 平面上的点 s_0 被映射为 w 平面的原点. 因此，w 上映射曲线是否包围原点，关键在于 s

平面上被映射曲线是否包围 s_0 点. 如果 s 上的闭合曲线不包围零点 s，则映射曲线亦不包围 w 的原点，因此围绕值 $C=0$. 应当指出，这与 s 平面上曲线是否包围 s 平面的原点无关，如图 6-1 所示.

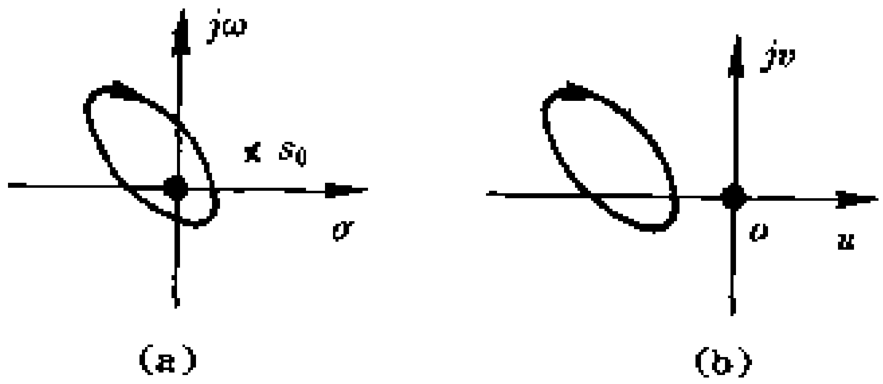


图 6-1 (a)s 平面；s_0 不被包围； (b)w 平面：$\oint\angle\omega=0$

如果 s 上闭合曲线包围 s_0 点，由于式(6.8)所实现的映射只是将 s 平面的曲线作一平移，因此在形状和围绕方向上都不含有任何变化. 如果在 s 平面上曲线是顺时针围绕 s_0 一周的，那么在 w 平面上也必然是沿顺时针围绕原点一周，即 $C=1$，如图 6-2 所示.

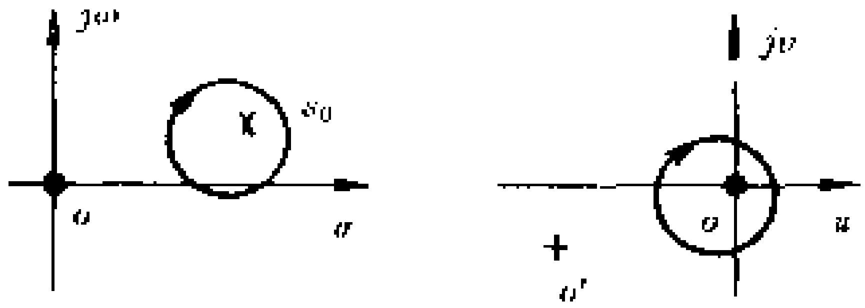


图 6-2 (a)s 平面：s_0 被包围； (b)w 平面：$\oint\angle\omega=2\pi$

由此可见，平移映射的结果是：或者 $C=0$，或者 $C=1$. 这取决于 s 平面上的曲线是否包围零点 s_0. 事实上，如果式(6.8)中的函数包含一个实数因子，如 $F(s)=a(s-s_0)$，上述结论同样适用. 因为映射函数是否含有因子 a，只改变复变函数的模，而不改变它的幅角. 因此这只和映射曲线形状有关，和围绕值无关.

(2)两个零点的情形　设映射函数是两个一次幂函数的乘积

$$w = (s - s_1)(s - s_2) \tag{6.9}$$

则在 s 平面上存在两个零点 s_1 和 s_2. 这时可以分三种情形来讨论：

(A) s 上的闭合曲线既不包围 s_1 也不包围 s_2，w 上的映射曲线不围绕原点. 于是 $C=0$.

(B) s 上闭合曲线包围其中一个零点，比如 s_1，但不包围 s_2. 这时，w 上的映射曲线将顺向围绕原点一周，即 $C=1$.

(C) s 平面的闭合曲线把 s_1 和 s_2 都包围在内，这时，由于 w 平面上幅角的变化是 s 平面的两倍，因此，w 上的映射曲线顺向围绕原点两周，$C=2$.

对于 $s_1=s_2$ 的重根情形，则只存在(A)和(C)两种情形.

对于更高次的多项式的情形，即 s 平面上有更多个零点，不难将上述的讨论进行推广：(1)w 平面上的映射曲线总是顺向围绕原点的；(2)其围绕值 C 等于 s 上闭合曲线包含零点的个数. 如果将所包围的零点个数记作 Z，则关于 s 的多项式所实现的映射，其围绕值

$$C = Z \tag{6.10}$$

2. **反向围绕**　先讨论 s 的倒数所实现的映射. 设

$$w = \frac{1}{s}, \text{且 } s = \rho e^{j\theta} \tag{6.11}$$

则

$$w = \rho^{-1} e^{-j\theta} \tag{6.12}$$

由于 w 可表示为

$$w = r e^{j\varphi} \tag{6.13}$$

于是 w 和 s 的幅角关系为

$$\angle w = -\angle s, \text{或 } \varphi = -\theta \tag{6.14}$$

当 s 平面上闭合曲线沿顺时针围绕原点一周时，$\oint \angle s = -2\pi$. 这

时由于式(6.14),有 $\oint \angle w = +2\pi$. 这说明 w 上映射曲线将反绕原点一周,即 $C=-1$,或 $R=1$. 如图 6-3 所示.

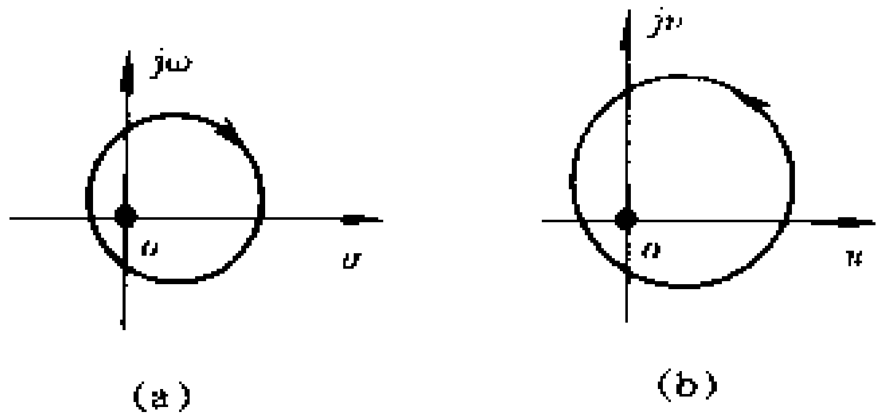


图 6-3 $w=\frac{1}{s}$时映射

对于一般的单极点情形:

$$w = \frac{1}{s - s_1} \tag{6.15}$$

所实现的映射,只要 s 平面的闭合曲线包围极点 s_1,w 上的映射曲线将反绕原点一周,即 $R=1$. 否则,$R=0$. 对于多极点情形,不难根据前面的讨论得到如下结论:(1)w 上的映射曲线总反绕原点的;(2)其反向围绕值 R 等于 s 上闭合曲线所包围的极点数 P,即

$$R = P \tag{6.16}$$

3. **一般有理分式函数的映射** 有 m 个零点($-z_1,-z_2,\cdots,-z_m$)和 n 个极点($-p_1,-p_2,\cdots,-p_n$)的有理分式函数

$$w = \frac{a_m(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \tag{6.17}$$

将把 s 平面的闭合曲线映射到 w 平面. 如果 s 平面的闭合曲线包围 Z 个零点和 P 个极点,则综合前面的讨论可得 w 平面上映射曲线的反向围绕圈数为

$$R = P - Z \tag{6.18}$$

上式考虑了 $R=-C$. 这就是要说明的围绕定理. 它可用留数理论

得到严格的证明.

三、乃奎斯特判据

1. **单位反馈系统的稳定性**　假定系统由单位反馈所构成，如图 6-4 所示. 系统的前馈通路的传递函数在这里用 $G(s)$ 来表示. 于是闭环传递函数可写成

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)} \tag{6.19}$$

由式(6.19)可以看出，$W(s)$ 的极点就是其分母 $1+G(s)$ 的零点，所以系统稳定性条件也可表述为 $1+G(s)$ 的所有零点位于 s 平面的左半平面上.

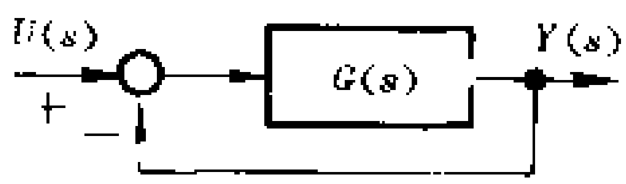


图 5-4　单位反馈系统

2. **围绕定理的应用**　为了检验 $W(s)$ 的极点(或 $1+G(s)$ 的零点)是否全部落在 s 的左半平面上，我们只需要研究是否有 $W(s)$ 的极点(或 $1+G(s)$ 的零点)落入 s 的右半平面上就够了. 为此，将 s 平面的闭合曲线这样来构成：在 s 的右半平面上作一半径 ρ 为 ∞ 的半圆和虚轴两端连结起来，这样和虚轴一起就构成了所要求的闭合曲线. 这时还要求动点按顺时针包围右半平面，如图 6-5 所示. 如果 $1+G(s)$ 没有零点落在这个半圆之内，则系统稳定. 否则不稳定.

假定映射函数 $1+G(s)$ 具有 P 个极点和 Z 个零点那么位于 s 平面的右半平面，那么根据上一小节所作的讨论，在 $1+G(s)$ 的映射平面上(记作 $1+G$)的映射曲线反向围绕原点的圈数为

$$R = P - Z \tag{6.20}$$

或者

$$Z = P - R \tag{6.21}$$

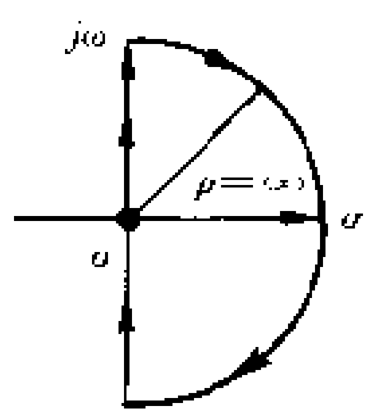


图 6-5　s 平面的闭合曲线

如果 $1+G(s)$ 没有零点位于 s 右半平面闭合曲线的包围之中，那么式(6.20)中，$Z=0$，从而

$$R = P \tag{6.22}$$

这样，系统稳定的充要条件又被表述为：在 $1+G$ 平面上，对应于 s 平面右半圆的映射曲线对坐标原点的反绕数和函数 $1+G(s)$ 在 s 右半平面的极点数相等.

3. **在 G 平面上的表述** 现在研究复变函数 $1+G(s)$ 和 $G(s)$ 之间的关系. $G(s)$ 是系统的开环传递函数，对于我们所讨论的系统，是一个有理分式函数. 因此，$1+G(s)$ 在通分之后也是一个有理分式函数. 两者的分母多项式是相同的，因而有相同的极点. 两者的不同点只在于实数 1 之差，从几何上看，只要将 $1+G$ 平面沿实轴移动 -1，就得到 $G(s)$ 的映射平面 G. 从 $1+\boldsymbol{G}$ 平面到 $\boldsymbol{G}$ 平面的映射是一种平移. 特别是 $1+\boldsymbol{G}$ 平面的坐标原点对应于 $\boldsymbol{G}$ 平面 $-1+j0$ 点，如图 6-6.

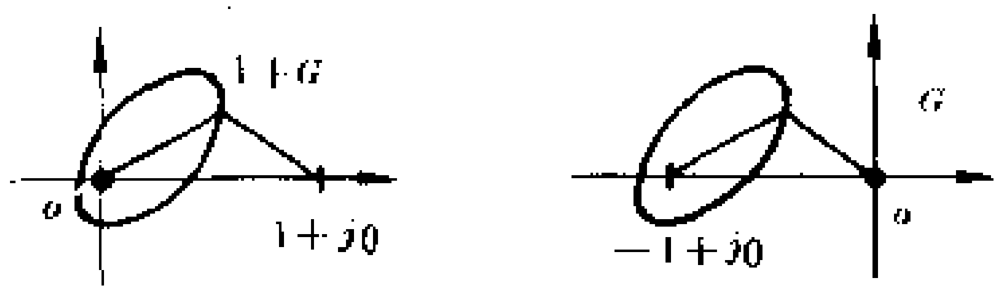


图 6-6 $1+\boldsymbol{G}$ 平面和 $\boldsymbol{G}$ 平面

现在我们转到 $\boldsymbol{G}$ 平面上讨论系统的稳定性. 其实这时式(6.22)仍然可以成立，只要把 $\boldsymbol{R}$ 的含义由表示 $1+\boldsymbol{G}$ 平面上的映射曲线对坐标原点的反绕数改为 $\boldsymbol{G}$ 面映射曲线对 $-1+j0$ 点的反绕数即可.

这个结论可以完整地表述如下：单位反馈的线性定常系统稳定的充要条件是开环传递函数 $G(s)$ 在 s 右半平面的极点数和它对 s 平面右半圆的映射曲线对 $-1+j0$ 点的反绕数相等. 这就是通

常所说的**乃奎斯特判据**.

4. **非单位反馈系统**　一般地说,反馈通路的传递函数通常不等于1,而用 $H(s)$描写,如图 6-7. 这时,闭环传递函数可写成

$$W(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{6.23}$$

这样的系统,其开环传递函数不再等于前馈通路的 $G(s)$,而是 $G(s)H(s)$. 因此,只要用 $G(s)H(s)$代替 $G(s)$,用 GH 平面代替 G 平面,前面的全部结论都适用.

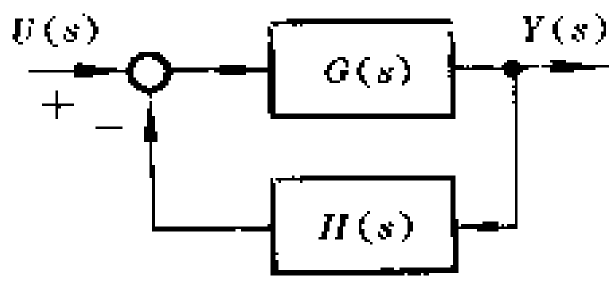


图　6-7 非单位反馈系统

乃奎斯特判据是结合作图的判断方法. 它必须在 GH 平面上作出映射曲线来才能进行判断. 这条曲线称为**乃奎斯特曲线**.

5. **乃奎斯特曲线作图法**　根据前述讨论,乃奎斯特曲线是指开环传递函数 $G(s)H(s)$对于 s 平面的虚轴和右半大圆圆弧构成的闭合曲线的映射. 本章 §5 指出,如式(5.22),对于有理真分式的开环传递函数也有

$$\lim_{s\to\infty}G(s)H(s)=0 \tag{6.24}$$

因此,有理真分式的 $G(s)H(s)$将 s 平面上半径为无穷大的右半圆弧映射为 GH 平面的原点.

乃奎斯特曲线的另一部就是 $G(s)H(s)$对 s 平面虚轴的映射曲线. 而这正是 §5 所讨论的频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$在复平面 GH 上的矢端轨迹. 注意到频率特性轨迹同样经过原点,所以从根本上说,乃奎斯特曲线就是反馈控制系统**开环传递函数**的频率特性曲线.

§5 中所有关于频率特性复平面轨迹的作图要点的讨论都适合于乃奎斯特曲线. 这里只需补充说明如何处理当极点位于虚轴上的情形.

因为如果有极点出现在 s 平面的虚轴上，那就意味着它在 GH 平面上被映射为无穷远. 乃奎斯特曲线，即 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的复平面轨迹将会断开. 为了避开这个问题，平常的做法是在极点右侧作一半径为无限小的半圆绕过极点，如图 6-8(a). 根据 s 平面上闭合曲线的走向，ω 应当由 $-\infty$ 变到 $+\infty$，因此这类小半圆，如从极点来看，是逆时针方向包围极点的. 所以在 GH 平面上，它们的映射曲线将对原点是顺时针方向围绕的，半径为无穷大的大圆的一部分. 再由它们去联接由于遇到极点而中断了的，但沿不同方向伸向无穷大的乃奎斯特曲线，使之最后成为一条闭合曲线.

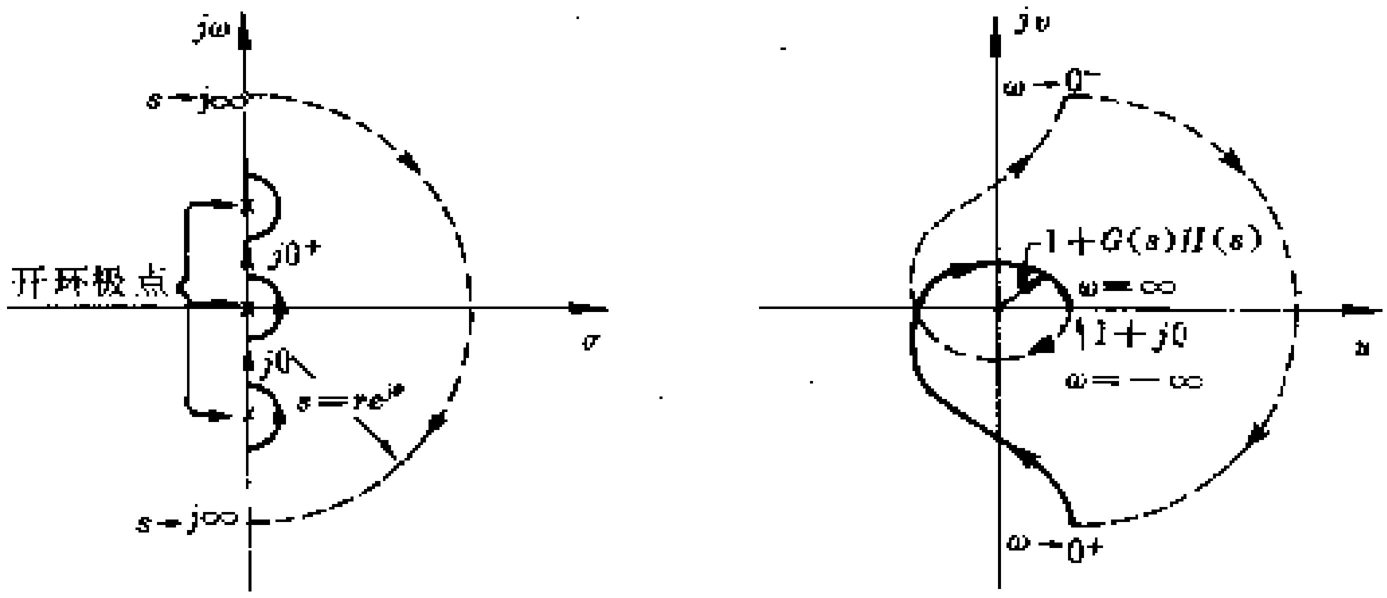


图 6-8　虚轴上有极点

根据 s 上半虚轴的映射曲线终止于 GH 的原点(即当 $\omega\to-\infty$ 时)，还可以标出映射曲线的围绕方向. 图 6-8(b)表示一条完整的乃奎斯特曲线.

乃奎斯特曲线作出之后，就很容易确定它对 $-1+j0$ 点的反绕数 R. 如果再知道开环传递函数在 s 右半平面的极点数 P，那么就可根据围绕定理

$$Z = P - R \tag{6.25}$$

求出 Z 值. 如果 $Z=0$，则系统稳定；否则不稳定.

乃奎斯特判据是根据开环传递函数的性质判断反馈系统闭环稳定性的方法. 在很多情形下，开环传递函数在右半平面没有极

点，即 $P=0$. 这相当于开环传递函数是稳定的. 这时，稳定性条件归结为乃奎斯特曲线的反绕数 $R=0$. 但是，值得注意，乃奎斯特判据并不要求系统一定是开环稳定的. 如果 $P\neq 0$，则只要 $R=P$ 能够满足，闭环系统仍然稳定.

〔例 1〕图 6-9 的系统中，设 $T_1=0.25$，$T_2=0.06$. 试画出 $K=6$ 或 25 时的乃奎斯特曲线，并判断系统的稳定性.

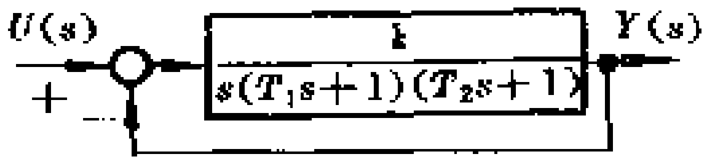


图 6-9

〔解〕系统的开环频率特性可以写成

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\omega T_1+1)(j\omega T_2+1)} \tag{A.1}$$

它的实部和虚部分别为

$$u=\mathrm{Re}[G(j\omega)]=-\frac{(T_1+T_2)K}{\sqrt{[(\omega T_1)^2+1][(\omega T_2)^2+1]}} \tag{A.2}$$

$$v=\mathrm{Im}[G(j\omega)]=\frac{(T_1T_2\omega^2-1)K}{\omega\sqrt{[(\omega T_1)^2+1][(\omega T_2)^2+1]}} \tag{A.3}$$

式中 $T_1=0.25$，$T_2=0.06$，K 则取 6 或 25.

根据式(A.2)和(A.3)，对于每一个 $\omega\in(-\infty,+\infty)$ 都可求出 $G(j\omega)$ 的实部 u 和虚部 v 之值，从而可以在 G 平面描画出相应的乃奎斯特曲线.

同时，注意曲线的几个特征可简化作图过程.

(1) $\omega=0$ 是一个极点，且 $\mathrm{Im}[G(j0)]\approx-\infty$；

$$\mathrm{Re}[G(j0)]\approx-0.31K\approx\begin{cases}-1.86 & (K=6)\\ -7.75 & (K=25)\end{cases}$$

(2) $\mathrm{Re}[G(j\omega)]<0$ 对一切 ω 成立. 这表示乃奎斯特曲线位于 G 的左半平面.

(3) 正半枝曲线与实轴的交点由 $\mathrm{Im}[G(j\omega)]=0$ 确定. 这时可

以求得

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \approx 8$$

代入(A.2)可得

$$\mathrm{Re}[G(j8)] \approx 0.05K$$

$$\approx \begin{cases} -0.3 & (K=6) \\ -1.25 & (K=25) \end{cases}$$

由此不难求得乃奎斯特曲线，如图6-10. 根据乃奎斯特判据可以决定：

$K=6$ 时，$P=0, R=0, Z=0$

$K=25$ 时，$P=0, R=-2, Z=2$

可见 $K=6$ 时，系统稳定；$K=25$ 时，系统不稳定.

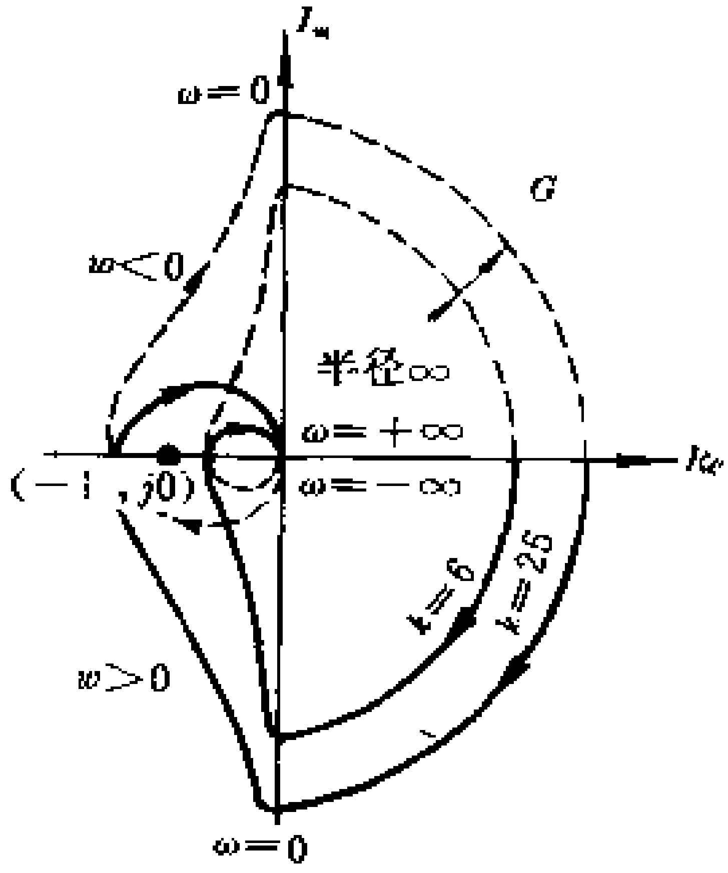


图 6-10　乃奎斯特曲线

前面§2在引入反馈控制时曾经指出，加大系统的开环增益将改善反馈系统的响应速度，但本例却说明如果系统的开环增益过大，将造成系统的不稳定，这又是我们需要加以避免的. 因此，我们只能选取一个适当的数值，既照顾到系统的响应速度，又注意到系统的稳定性. 下一节，我们将讨论这类参数选取的定量方法.

§7　相对稳定性

上节例题表明，开环增益对系统稳定性有明显影响. K值小

增益裕量和相位裕量是描写这种接近程度普遍采用的方法.

一、增益裕量和相位裕量

为简便起见,假定所讨论的系统是单位反馈系统,开环传递函数为 $G(s)$. 乃奎斯特曲线由开环频率特性

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)} \tag{7.1}$$

的矢端轨迹来表示. 如图 7-2,随着 ω 的增大,乃奎斯特曲线趋向 G 平面的原点.

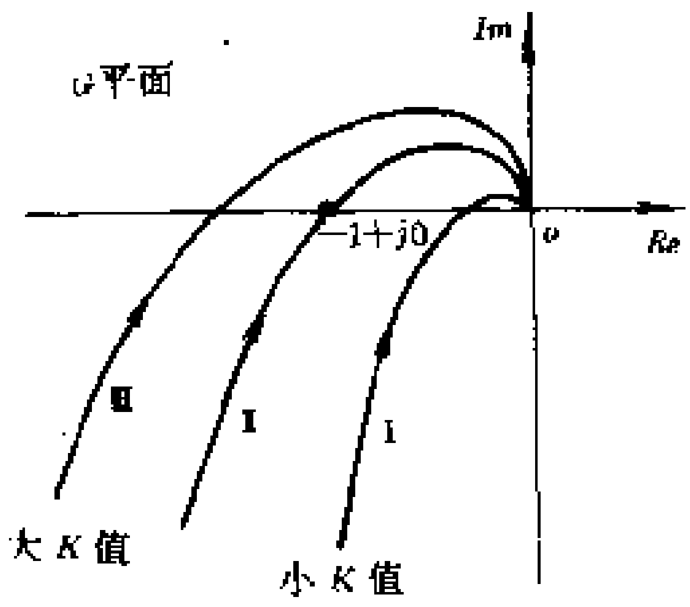


图 7-1 三种情形的乃奎斯特曲线

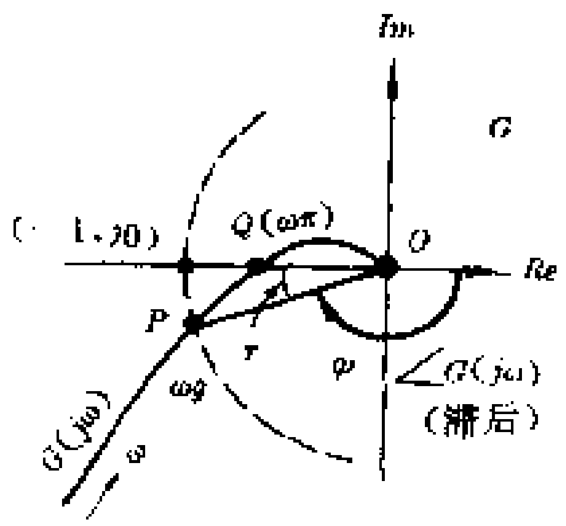


图 7-2 乃氏曲线极坐标图

1. **增益裕量** 假如乃奎斯特曲线在 G 平面与负实轴交于 Q 点,相应的 ω 值为 ω_π. 这时 Q 点的振幅特性为

$$A = |G(j\omega_\pi)| \tag{7.2}$$

其对数增益为

$$g = 20\log_{10}|G(j\omega_\pi)| \tag{7.3}$$

Q 点与 $-1+j0$ 点的距离可以作为衡量相对稳定性的标准. Q 点在负实轴上的坐标的绝对值为 A; $-1+j0$ 点坐标的绝对值则为 1. 习惯上用两者的对数之差来表示,并规定

$$g_m = 20\log_{10}|1| - 20\log_{10}|G(j\omega_\pi)|$$

为增益裕量. 由于式中右边第一项为零,所以

$$g_m = -20\log_{10}|G(j\omega_\pi)| \tag{7.4}$$

作为增益裕量的定义.

由于 Q 点位于负实轴上，辐角为 $-\pi$，所以

$$\angle G(j\omega_\pi) = -\pi \tag{7.5}$$

ω_π 称为**相位穿越频率**.

2. **相位裕量** 注意到只有增益裕量不能完全决定点 $-1+j0$ 和乃奎斯特曲线的接近程度. 即使在实轴上同交于 Q 点，但如果曲线斜率不一样，两者接近的程度也不同. 以原点为圆心作一单位圆，如图 7-2，若乃奎斯特曲线交单位圆于 P 点，相应频率为 ω_g. 这时 P 点的相位特性为

$$\varphi = \angle G(j\omega_g) \tag{7.6}$$

由于点 $-1+j0$ 的辐角为 $-180°$，所以定义 $\gamma=\varphi-(-180°)$ 为相位裕量，或者

$$\gamma = 180° + \angle G(j\omega_g) \tag{7.7}$$

注意到 ω_g 为过单位圆的频率，满足

$$|G(j\omega_g)| = 1 \tag{7.8}$$

ω_g 称为**增益穿越频率**.

综上所述，通过式(7.5)求得 ω_π，代入式(7.4)可以求得增益裕量 g_m；同样通过式(7.8)和(7.7)可以求得相位裕量 γ. g_m 和 γ 一起决定系统的相对稳定性.

增益裕量和相位裕量不仅在系统被判定是稳定时能够定量描写稳定的程度，而且也可以用来判别系统的不稳定性. 因为不难看出，当系统不稳定时，如图 7-1 的曲线 Ⅱ，将有

$$A = |G(j\omega_\pi)| > 1, \quad g_m = -20\log_{10}A < 0$$

$$\varphi = \angle G(j\omega_g) < -180°, \quad \gamma = 180° + \varphi < 0$$

而在稳定情形，裕量 g_m 和 γ 都是正的，并且数值越大系统越稳定.

二、延时环节对稳定性的影响

由于信号在传输线中传输(或者物料在生产过程中的输送)需要时间，只要信号在传输过程中的衰减和畸变不大而可以忽略，那么传输过程可以看作纯粹的时间延迟过程. 设传输线输入为

$x(t)$，输出为 $m(t)$，延迟时间为 τ，那么 $m(t)$ 和 $x(t)$ 的关系为 $m(t) = x(t-\tau)$．根据拉普拉斯变换的位移定理，有 $M(s)=X(s)e^{-s\tau}$．于是传输线的传递函数为

$$G(s) = e^{-s\tau} \tag{7.9}$$

于是，$G(j\omega)=e^{-j\omega\tau}$，或 $|G(j\omega)|=1$，$\angle G(j\omega)=-\omega\tau$．可以看出，这类环节的主要特点是相位迟后与 ω 成正比．它对系统稳定将造成不利的影响．由于这个特点，延时环节也称为**非最小相位环节**．下面以反应堆温度调节为例，讨论含延时环节的稳定性．

〔例 1〕如图 7-3 所示，核反应堆的温度通过调节石墨棒的插

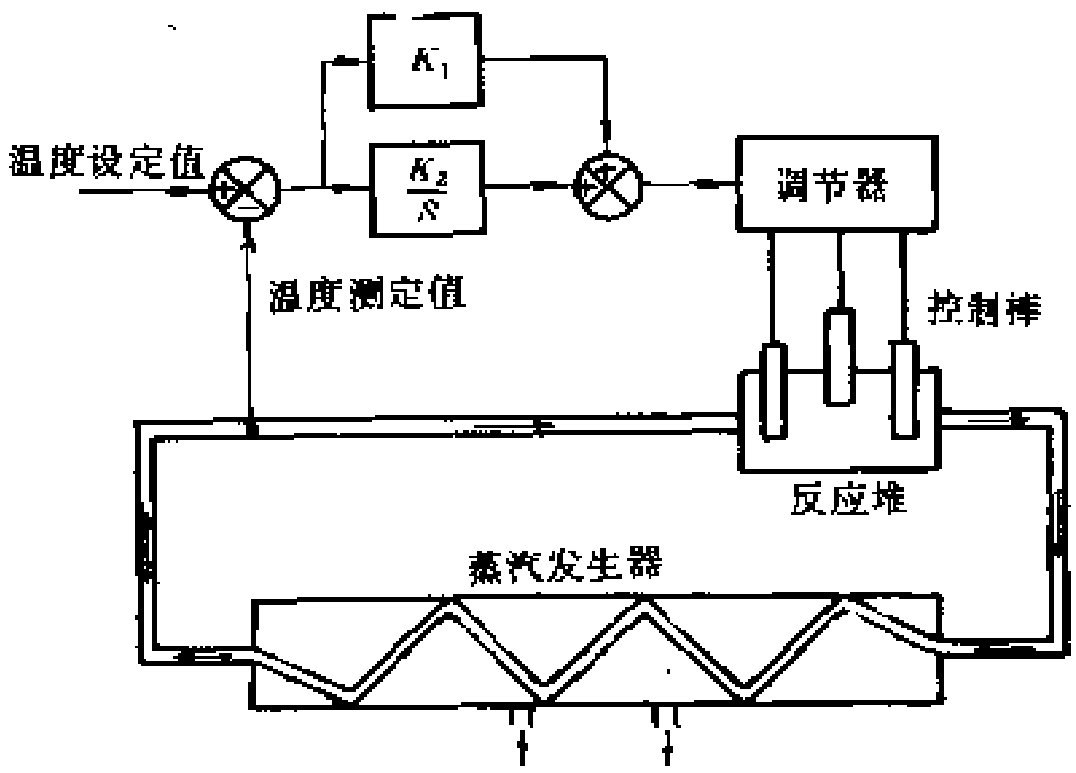


图 7-3　核反应堆温度控制示意图

入深度来控制．通过高温液体的循环流动把反应堆产生的热量带出来加热蒸汽发生器，用来发电等．由于液体流动会使反应堆的温度测量产生延迟，反应堆的温度变化过程的传递函数为

$$G_K(s) = \frac{e^{-s\tau}}{T_1 s + 1} \tag{A.1}$$

τ 是延迟环节的时间常数，取值为 0.2；T_1 是由于反应堆的热惯性造成的惯性滞后时间，取值为 0.4．控制器是由 PI 调节器构成．若

使系统具有 30°的稳定性相位裕量，试求调节器的待定常数 K_1 和 K_2.

温控方块图如图 7-4. 系统的开环传递函数可以写成：

$$G(s)=\frac{K_2\left(\frac{K_1}{K_2}s+1\right)}{s(T_1s+1)}e^{-s\tau} \qquad (A.2)$$

令

$$\frac{K_1}{K_2}=T_1 \qquad (A.3)$$

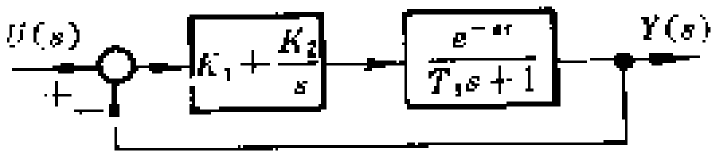


图 7-4 核反应堆温控方块图

则(A.2)中的零极点相消. 于是传递函数简化为

$$G(s)=\frac{K_2}{s}e^{-s\tau} \qquad (A.4)$$

由式(A.4)描写的系统的相位特性和增益特性分别为$\angle G(j\omega)=-(\omega\tau+90°)$和$|G(j\omega)|=K_2/\omega$. 注意到系统要求相位裕量 $\gamma=30°$，应用式(7.7)和(7.8)不难求出增益穿越频率 $\omega_g=\pi/3\tau\approx10$；$K_2=\omega_g\approx10$. 而由式(A.3)可得 $K_1\approx4$.

如果系统比较复杂，就难以直接应用代数方程来求解相对稳定性问题.

三、对数频率特性图的应用

求出穿越频率 ω_π 和 ω_g 是确定反馈系统增益裕量和相位裕量的前提. 然而，对于三阶以上的系统求解方程(7.5)和(7.8)常常会遇到困难. 由于上节引入的乃奎斯特曲线的另一种表示——对数频率特性图(即波德图)的应用是求解 ω_π 和 ω_g 十分有效的近似方法，因此被广泛用来讨论系统的相对稳定性. 图 7-5 绘出了复平面上乃奎斯特曲线和波德图之间的对应关系.

一阶或二阶系统的增益裕量为无穷大. 因为这些系统的乃奎斯特曲线与负实轴不相交，因此，理论上一阶或二阶系统不可能是不稳定的.（当然应当指出，因为在推导系统方程时忽略了一些小

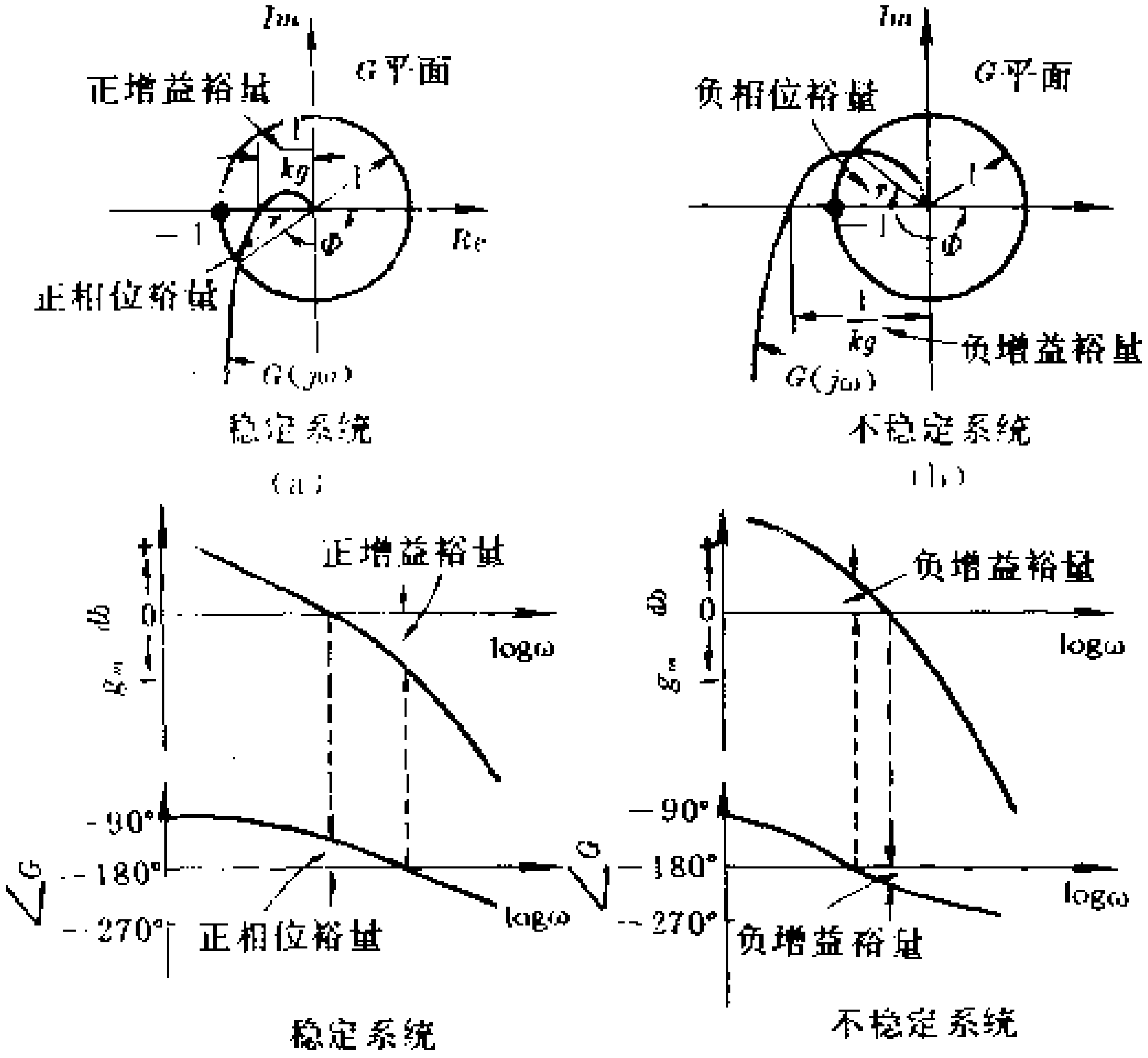


图 7-5 稳定的和不稳定的系统的增益裕量和相位裕量.(a)为奈斯特图 (b)波德图

的时间延迟,所以在某种意义上说,所谓一阶或二阶系统只能是近似的.如果计及这些小的滞后,则所谓一阶或二阶系统可能变成不稳定的.)

适当的相位裕量和增益裕量,可以防止系统参数变更和元件变化造成的影响,并且指出了一定的频率范围.这两个值将闭环系统的工作状态限制在谐振频率附近.为了得到满意的性能,相位裕量应当在30°和60°之间,而增益裕量应当大于6分贝.对于具有这些裕量的系统,即使开环增益和元件的时间常数在一定的范围内

发生变化，也能保证系统的稳定性. 它在设计控制系统或调整系统的增益常数时，却提供了一种方便的方法.

开环传递函数的幅值和相位特性有一定关系. 要求相位裕量在 30°和 60°之间，即意味着在对数坐标图中，对数幅值曲线在增益穿越频率上的斜率不应陡于－40 分贝/10 倍频程. 在大多数实际情形中，为了保证系统稳定，要求增益穿越频率上的斜率为－20 分贝/10 倍频程. 如果增益穿越频率上的斜率为－40 分贝/10 倍频程. 则系统可能是稳定的，也可能是不稳定的.（即使系统是稳定的，相位裕量也比较小.）如果在增益穿越频率上的斜率为 -60 分贝/10 倍频程，或者更陡，则系统是不稳定的.

〔例 1〕设控制系统如图 7-6 所示，当 $K=10$ 和 $K=100$ 时，试求系统的相位和增益裕量.

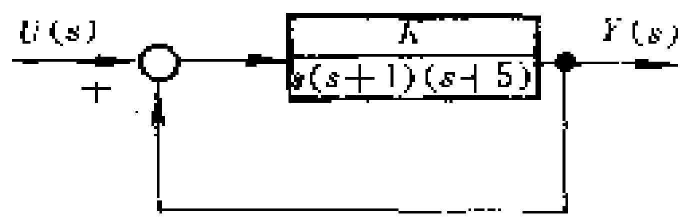


图 7-6　控制系统

〔解〕首先对于 $K=10$ 划出对数频率特性图 7-7(a). 从增益曲线与 0 分贝线的交点处可读出 $\omega_g \approx 1.3$. 对应于这个 ω_g 值，可以从相位特性曲线图中读出相位裕量 $\gamma \approx 21°$. 而从相位曲线与 0°坐标线交点处又可读出 $\omega_\pi \approx 2.1$；返回到增益特性曲线图可读出增益裕量 $g_m \approx 8$ 分贝. 由于 γ 和 g_m 都为正，系统稳定，并且有相当裕量.

当增益从 10 增大到 100 时，增益特性曲线应当在对数坐标图上向上移动 20 分贝. 在图 7-7(b)上，保留了曲线图面上的位置而将坐标向下移动了 20 分贝. 不过相位特性曲线并没有改变. 由于增益的变大，ω_g 在坐标轴上的位置由原来位于 ω_π 的左侧移至右侧而变为 $\omega_g \approx 4.3$. 这时从图中可以读出 $\gamma \approx -30°$；$g_m \approx -12$ 分贝. 它们都是负值，系统不稳定. 不过这些数据为我们对系统进行校正使之达到稳定提供了定量依据.

应当指出，为了获得满意的系统性能，我们必须将相位裕量增

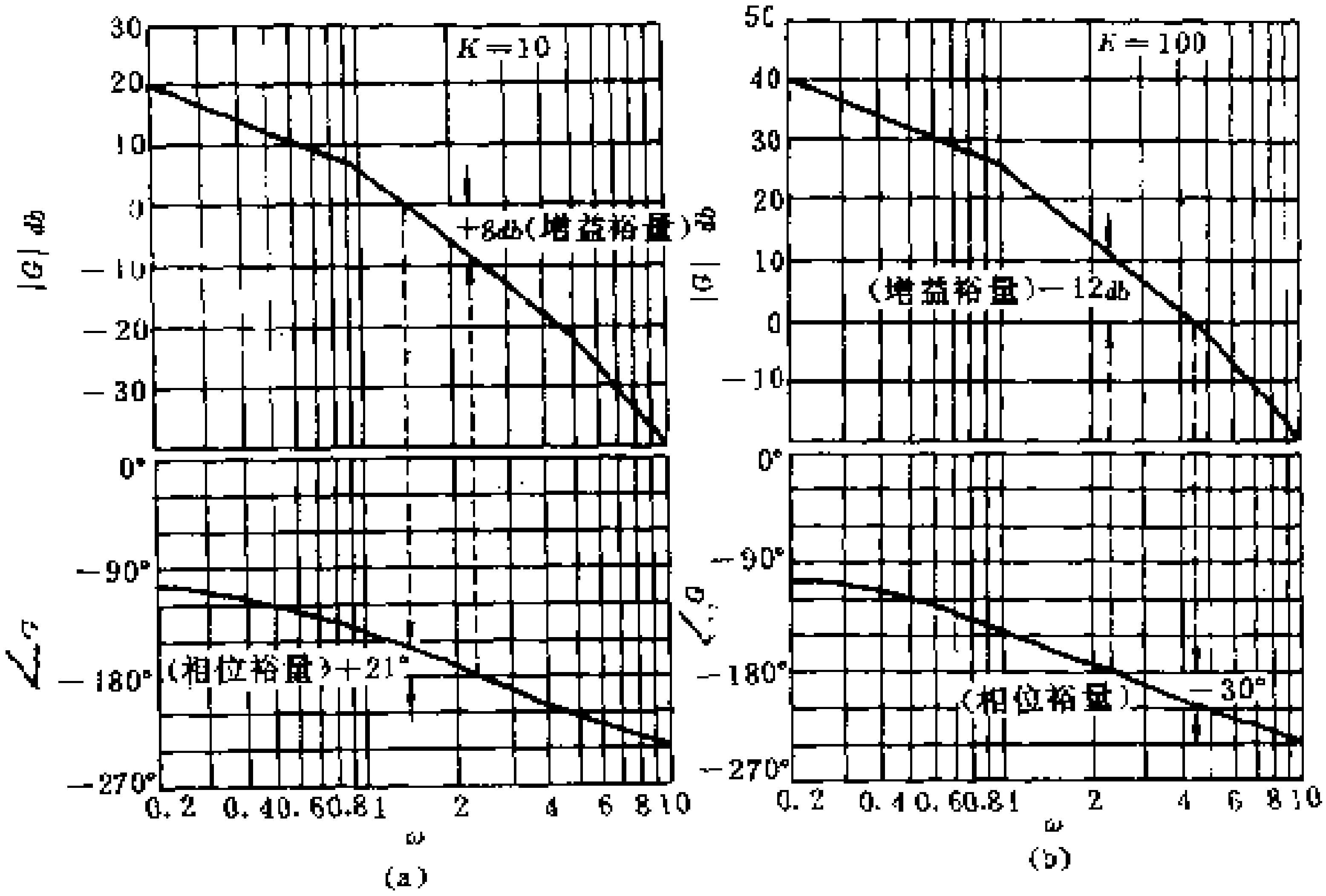


图 7-7 $K=10$ 和 $K=100$ 时的波德图

加到 30°～60°. 这可以通过减小增益 K 达到. 但是减小 K 值是我们不希望的，因为小的 K 值会造成大的稳态偏差. 因此通过增加校正环节来改变开环频率特性曲线的形状，便成为必不可少的了. 这种方法，将在 §8 进行详细讨论.

§8 反馈控制系统的补偿

这一节简要介绍反馈控制系统特性设计的基本思想. 设计过程中常常采用一些具有特殊功能的环节，使系统达到预期的特性指标. 这种设计过程称为补偿.

本章开头几节叙述了系统的时域特性，并引入了 PID 调节的控制方案. 现在基于频率特性和稳定性理论介绍系统的补偿方法.

一、调整增益的补偿方法

所谓增益调整是改变控制回路中某个环节的增益，也就是适

当地改变开环传递函数的增益常数，以得到所需的系统特性.这种补偿方法非常简单，但光用这种方法常常得不到所需的特性.然而，把调整增益和其它补偿方法结合起来使用，可以说是最基本的补偿方法.调整增益时，系统的稳态特性和过渡特性同时发生变化.一般来说，增益减小，系统的相对稳定性增加，但稳态偏差也增大.

为了克服这一困难，在前向控制通路中串联一个补偿环节可以改善系统的特性.补偿环节有相位超前环节和相位迟后环节.前者可增加系统的稳定性，提高快速性，后者用以减少稳态偏差，提高系统的精度.当需要同时改善稳态特性和快速性时，就有必要同时采用这两种补偿，把这两者合成为一个的补偿环节叫相位超前迟后环节.

二、相位超前补偿

提高系统快速性的简单方法是增加开环增益.这是因为快速性可用开环对数频率特性的增益穿越频率的大小来表示，由于开环增益提高，增益穿越频率就变大.然而，如上面指出的单是增加开环增益会使相位裕量（以及增益裕量）减小，稳定度变坏.所以，如果预先在增益穿越频率附近使相位提前一些，这样就使相位裕量增大.再增加开环增益时就不会损害稳定度.基于这种考虑，为了提高系统的快速性而不使其它特性变坏，就需加入相位超前环节.一个简单例子是图 8-1 所示的高通滤波器，它的传递函数为

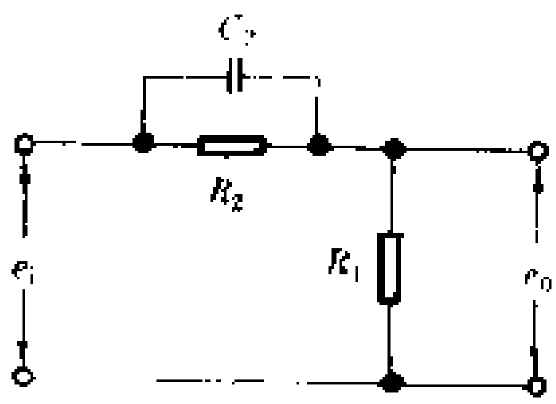


图 8-1　相位超前环节

$$G_D(s)=\frac{\alpha(T_d s+1)}{\alpha T_d s+1}\quad(0<\alpha<1)\qquad(8.1)$$

这里，

$$\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, T_d = R_2 C_2$$

这个相位超前环节的对数频率特性如图 8-2 所示. 图上,增益特性用折线近似表示. 而 $G_d(j\omega)$的相位为

$$\angle G_d(j\omega) = \mathrm{arctg}\,\omega T_d - \mathrm{arctg}(\alpha\omega T_d) \tag{8.2}$$

使$\angle G_d(j\omega)$为最大时的频率 ω_{max}可由下式求得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\omega T_d)}\angle G(j\omega) = \frac{(1-\alpha)[1-\alpha(\omega T_d)^2]}{[1+(\omega T_d)^2][1+\alpha^2(\omega T_d)^2]} = 0 \tag{8.3}$$

自上式可得

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\, T_d} \tag{8.4}$$

而 ω_{max}处的相角 φ_{max}为

$$\varphi_{max} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \mathrm{arctg}\,\sqrt{\alpha} \tag{8.5}$$

用相位超前环节时,α、T_d 的大小应如何选择呢? 一般,α 在 0.005～0.25 的范围内. 下面再讨论 T_d 的选择方法. 先画出系统未经补偿时的开环对数频率特性,如图 8-3 所示. 假定图上的相位裕量是希望值. 我们要调整增益,使 ω_g 提高而又要不改变相位裕量. 这时,我们可加入相位超前环节 $G_d(s)$,使开环对数频率特性的相位在频率 ω_{max}处得到超前量 φ_{max}. 因而,可按照图 8-3 的做法,求出 D 点和

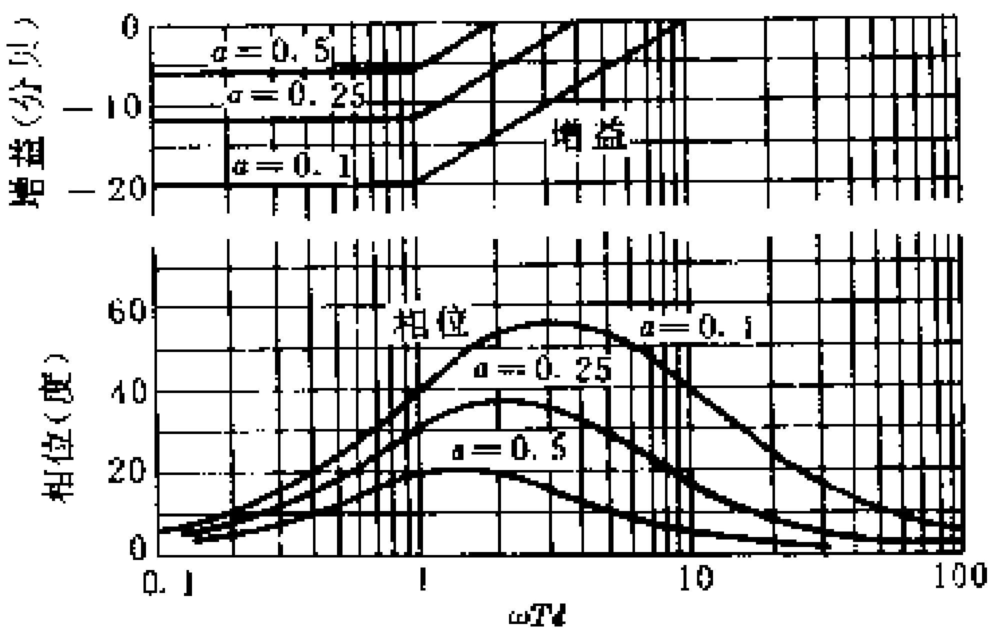


图 8-2　相位超前环节的对数频率特性图

该点的频率 ω_d，令 $\omega_d=\omega_{max}$，由式(8.4)求得 T_d 为

$$T_d=\frac{1}{\sqrt{\alpha}\,\omega_d} \qquad (8.6)$$

下面进行增益调整，提高增益使穿越频率由 ω_g 变为 ω_d。因为只是调整增益，相位特性不会变，相位裕量就保持原来的值，这是一种决定 T_d 的方法。

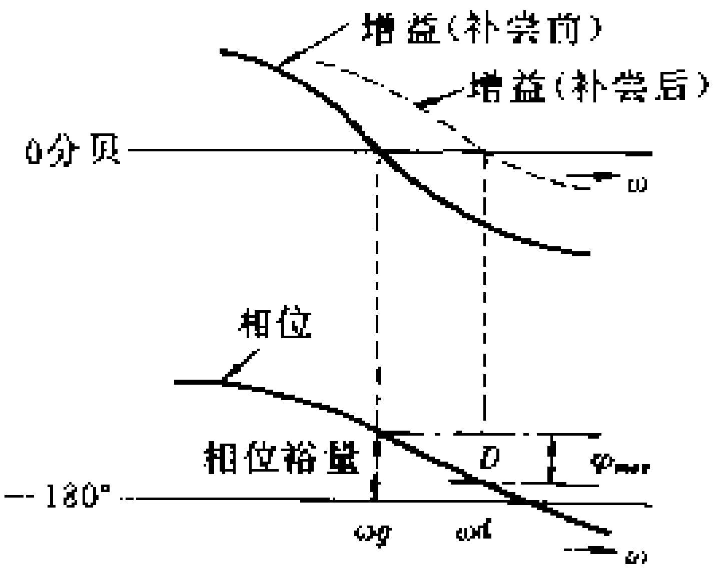


图 8-3 用开环对数频率特性图进行补偿

〔例 1〕对于开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)} \qquad (8.7)$$

的反馈控制系统，串联一个 $\alpha=0.1$，$T_d=1$ 的相位超前环节。试确定增益常数作多大提高使增益裕量和相位裕量还能保持在原有 $K=1$ 时的 14 分贝和 41°左右？

〔解〕串联相位超前环节以后，控制系统方块图如图 8-4 所示。其开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)}\,\frac{s+1}{0.1s+1}$$

或

$$G(s)=\frac{K}{s(0.25s+1)(0.1s+1)} \qquad (8.8)$$

其开环频率特性为

$$g=20\lg\frac{K}{\omega\sqrt{1+0.25^2\omega^2}\,\sqrt{1+0.1^2\omega^2}} \qquad (8.9)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \mathrm{tg}^{-1}0.25\omega - \mathrm{tg}^{-1}0.1\omega \qquad (8.10)$$

相位特性与 K 值无关. 先令 $\varphi=-\pi$，可求相位穿越频率

$$\omega_k \approx 6\ 秒^{-1}$$

再令 $g=-14db$，由式(8.9)可求出增益常数：

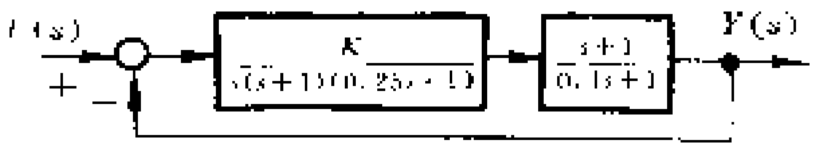


图 8-4 相位超前补偿

$$K = 2.5$$

保持 K 之值为 2.5. 令 $g=0$，可求出增益穿越频率为

$$\omega_g = 2.2\ 秒^{-1}$$

代入式(8.10)可得相位裕量为

$$\gamma = 49°$$

上述表明，由于串联了补偿环节，当 K 增加到 2.5 时，系统仍然能保持原来 $K=1$ 时的增益裕量和相位裕量. 但由于 K 的增加，稳态偏差有较大降低，变为 $e(\infty)=0.4$ 左右.

最后，应当指出，在本例中相位超前环节的补偿作用实际上是通过改变开环极点 $s=-1$ 为 $s=-10$ 来实现的.

三、相位迟后补偿

控制系统的稳态特性取决于开环传递函数的增益. 为了改善稳态特性而不影响稳定度和快速性，只要提高低频段的增益即可. 为此目的采用相位迟后环节，它的简单例子如图 8-5 所示. 这个环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{T_i s + 1}{\beta T_i s + 1} \quad (\beta > 1) \qquad (8.11)$$

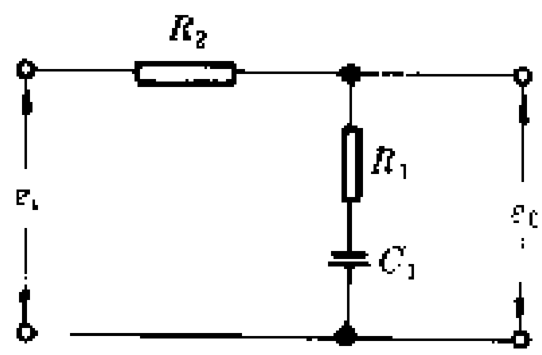


图 8-5 相位迟后环节

这里，β 和 T_i 为

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{R_1}, \quad T_i = R_1 C_1 \tag{8.12}$$

这个相位迟后环节的对数频率特性图如图 8-6 所示，图上增益特性用折线近似表示. 由图可知，当频率高于 $1/T_i$ 时，增益全部下降 β 倍，如果把这段频率范围的增益提高到原来的增益值，当然低频段的增益就提高了. 如果 $1/T_i$ 比补偿前系统的穿越频率低很多，那么即使加入这种相位迟后环节，在 ω_g 附近的相位几乎没有什么变化，快速性等也几乎不会受影响，用相位迟后环节进行补偿的机理并不是利用相位迟后，而是使得大于 $1/T_i$ 的频段内的增益全部发生下降，并且在这个频段内的相位变化很小，根据上面的理由，β 和 T_i 要选得尽可能大，但考虑到实现的可能性，也不能选得过分大. 它的最大值为 $\beta_{max}=20$，$T_{imax}=7\sim8$ 秒. 一般选择 $\beta=10$，$T_i=3\sim5$ 秒. 加相位迟后环节进行补偿的具体做法和相位超前补偿是完全一样的.

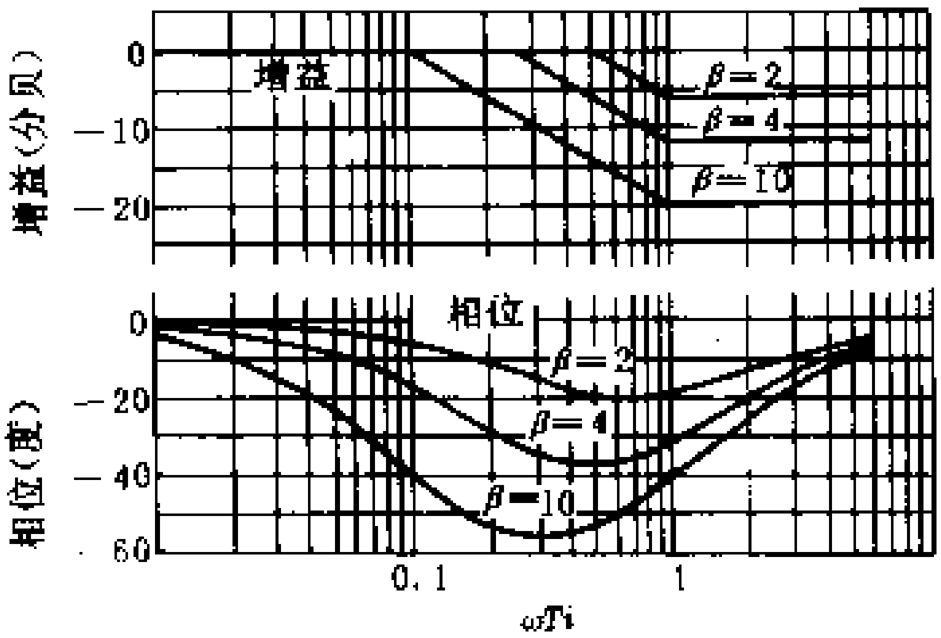


图 8-6 相位迟后环节的对数频率特性图

〔例 2〕在例题 1 的结果上再加入 $\beta=10$，$T_i=3$ 的相位迟后环节进行补偿.

〔解〕系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)} \frac{s+1}{0.1s+1} \frac{3s+1}{30s+1}$$

和前面相似的方法可求 $K=25$，$g_m=14$ 分贝，$\gamma=49°$，而

$$e(\infty) = \frac{1}{25} = 0.04.$$

可见串联相位迟后环节后，系统稳定性不变，稳态偏差却可降低10倍.

从上述设计过程的讨论可以看出，由于反馈控制系统存在着诸如稳定性和稳态偏差等方面的矛盾因素，如何兼顾矛盾着的诸方面而确定适当的性能指标，需要经验. 同样，选择怎样的补偿环节也需要经验. 只有这些都确定之后，经典的反馈控制理论才能给出定量的讨论. 所以说，这个理论是半定量的. 依据这个理论所进行的设计是半经验的.

另一方面，如§4已经指出，顾及到稳定性的要求，反馈控制系统可能跟踪的输入信号一般不高于二阶. 这一点现在更清楚了. 这是因为开环传递函数包含二阶以上积分环节的系统，要保持稳定将非常困难.

为使系统跟踪更剧烈变化的输入信号和适应更复杂控制系统的设计需要，新的控制理论的出现是可以想象得到的.

习　　题

1. 设温度计经一分钟温度测量后的指示值是实际温度的98%，并且假定温度计是一阶系统，求时间常数

如果将温度计放在澡盆内，澡盆的温度每分钟上升10℃，求温度计的误差.

2. 系统的方块图如图9-1所示.

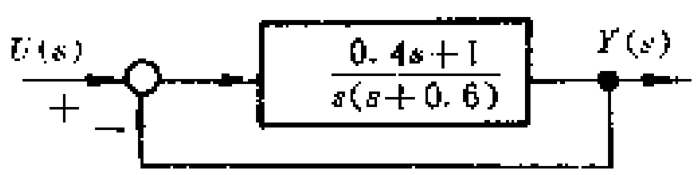


图 9-1

求系统的单位阶跃响应、峰值时间和最大超调量.

3. 如图9-2所示的多环系统，求$Y(s)$和$N(s)$之间的闭环传递函数.

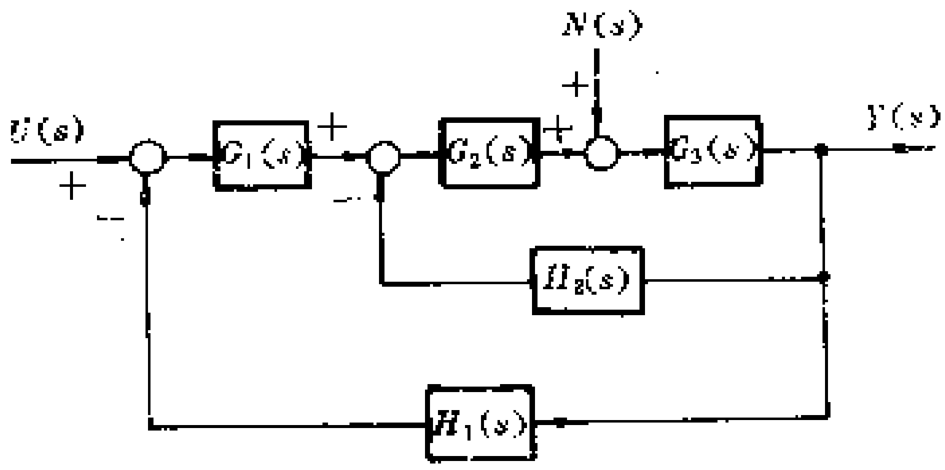


图 9-2

4. 如图 9-3(a)和(b)所示的两个系统中，K 是可调增益，$G(s)$ 和 $H(s)$ 不变. 试求出各自扰动的传递函数，并说明“为了减小扰动的影响，应尽可能增大可调增益 K”这句话是否都正确.

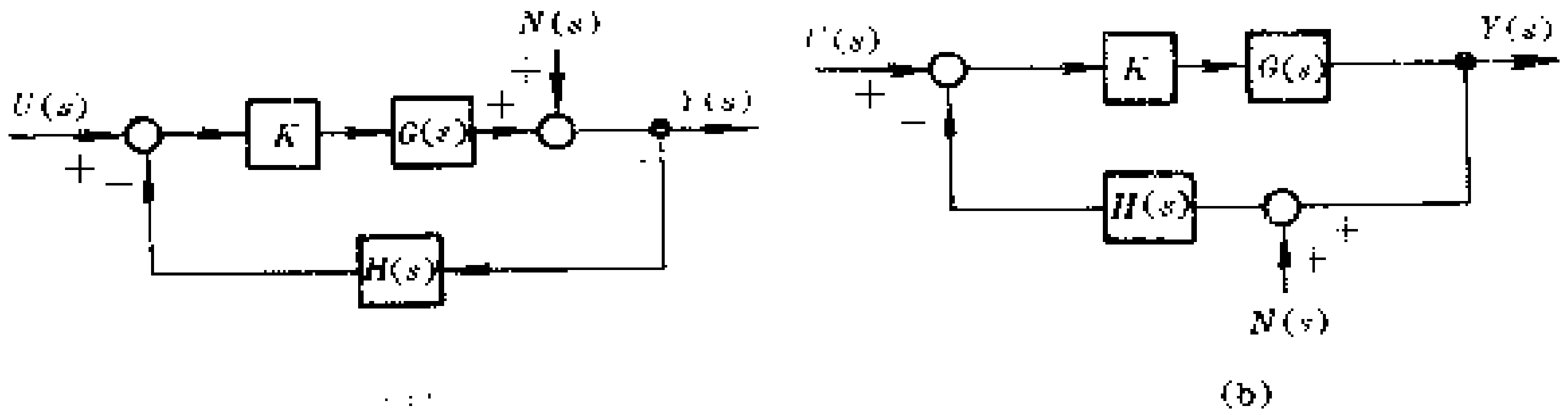


图 9-3 (a)在前向通路中有扰动加入的控制系统；(b)在反馈通路中有扰动加入的控制系统

5. 图 9-4(a)是一个卫星姿态控制系统原理图. 小喷嘴的反作

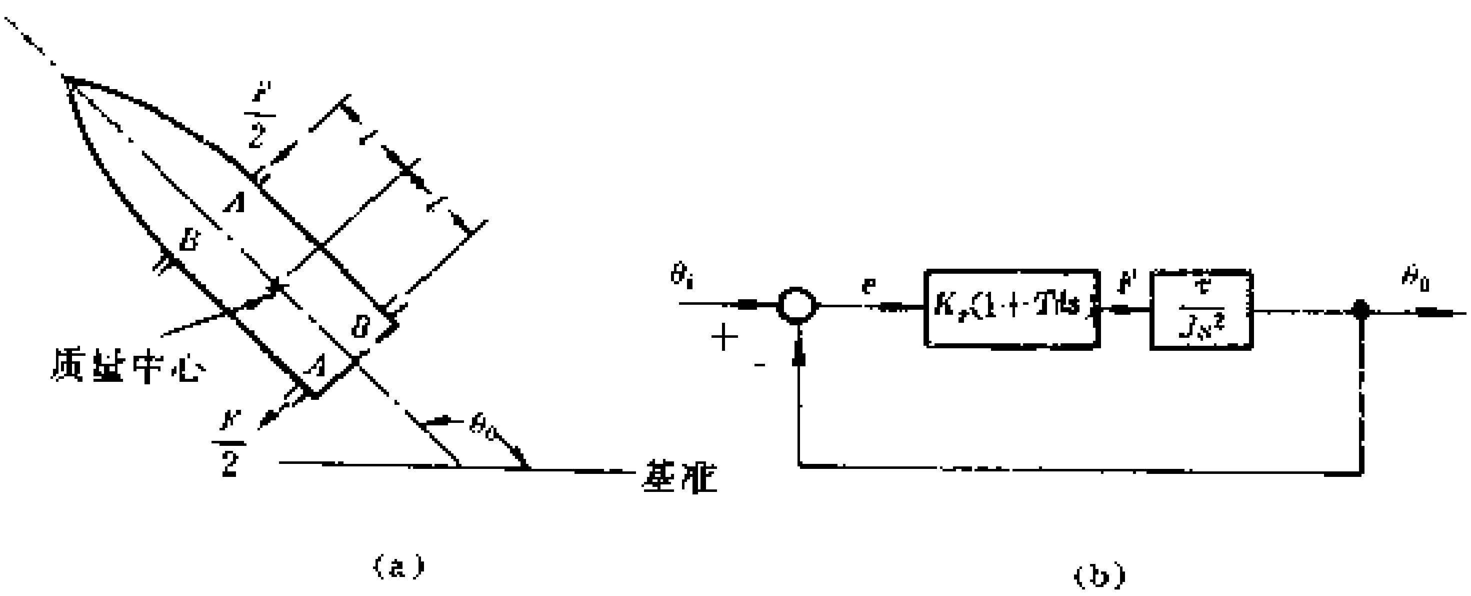


图 9-4 (a)卫星姿态控制系统的原理图； (b)方块图

用力可以旋转卫星体使其进入所要求的姿态. 用 A 或 B 表示的两个斜对称配置的喷嘴是成对工作的. 设每一喷嘴加到系统上的推力是 $F/2$、力矩是 Fl、以及对质量中心的惯性矩是 J.

假定姿态控制器是比例一加一微分的形式. 图 9-4(b)所示的是系统的方块图. 为使系统具有无阻尼频率为 ω_n，比阻尼为 ζ，试确定比例增益 K_p 和微分时间 T_d.

6. 对于图 9-5 所示的系统，能否选择一个合适的控制器，使得系统对于单位阶跃扰动的稳态响应为零?

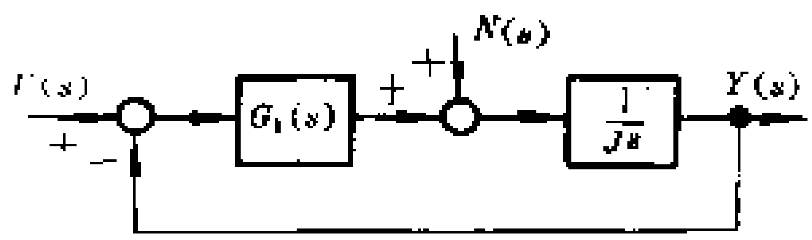


图 9-5

7. 潜水艇的深度调节通过控制水平导向板的倾角 θ 来实现，如图 9-6(a). 深度的测量通过压力传感器来实现. 控制系统方块图如图 9-6(b). 假如输入变量为(i) $u(t)=1$；(ii) $u(t)=2t$；(iii) $u(t)=3t^2$ 分别表示要潜水艇保持恒定深度；匀速下沉；匀加速下沉三种情况，试求它们的稳态偏差.

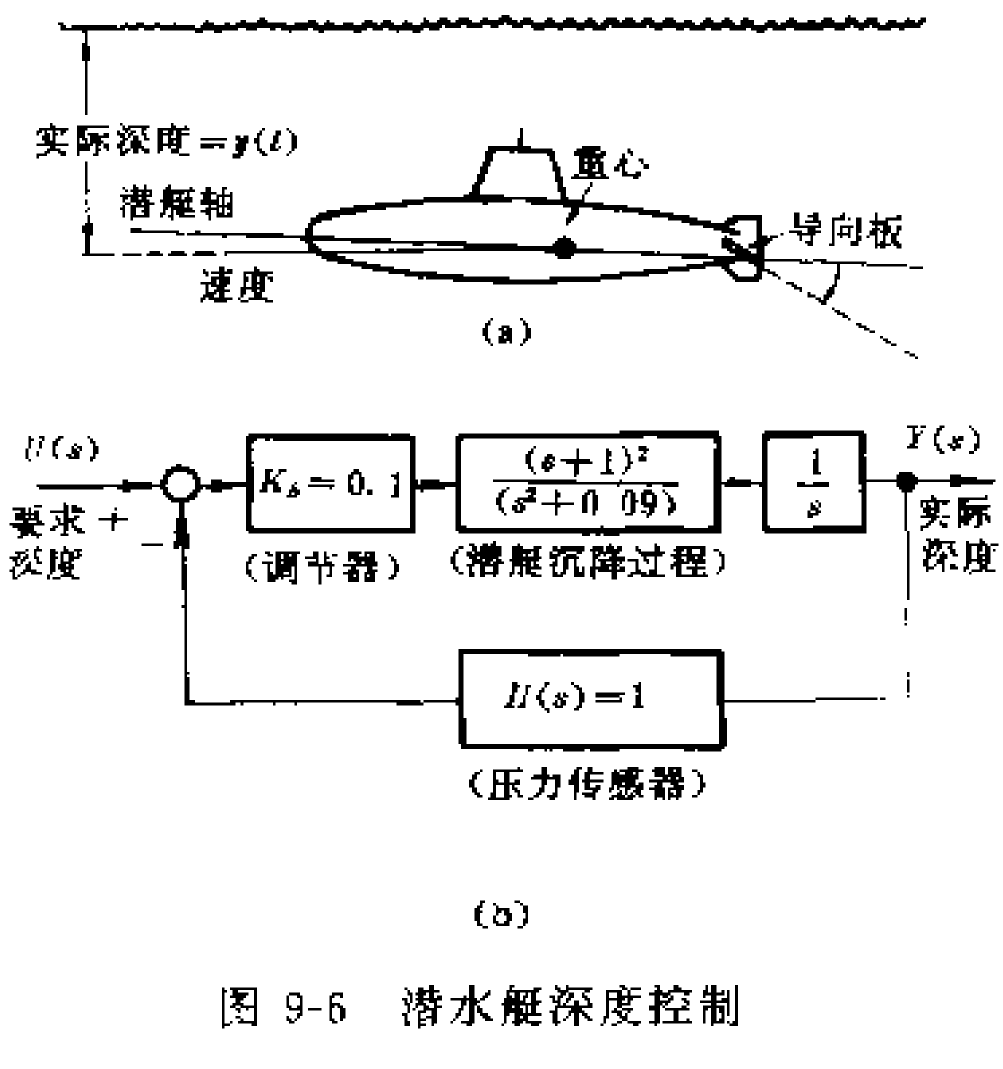


图 9-6　潜水艇深度控制

8. 对于如图 9-7 的系统作用以下列输入信号：

(1) $u(t)=\sin(t+30^\circ)$

(2) $u(t)=\sin(t+30^\circ)-2\cos(2t-45^\circ)$ 时，试求系统的稳

态输出.

9. 开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(2s+1)}$$

设 $K=2$,(i)试画出 G 平面矢量轨迹图;(ii)判定稳定性;(iii)确定使闭环系统稳定的 K 值取值范围.

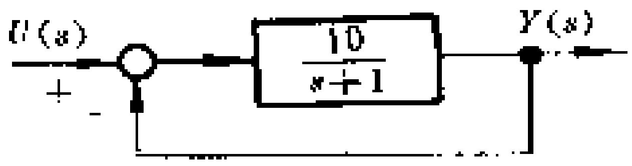


图 9-7

10. 对于图 9-8 的系统,(i)设 K =1,试画出开环频率特性复平面轨迹图;(ii)求出使系统稳定的 K 值取值范围.

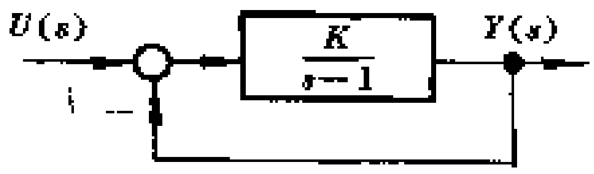


图 9-8

11. 图 9-9 是高速火车自动制动系统方块图. 图中参数设定为 $K_1=1$, $K_2=1000$, $K_3=0.001$; $a=b=0.1$. 为使系统保持稳定,试确定放大器的增益 K_a 的取值范围.

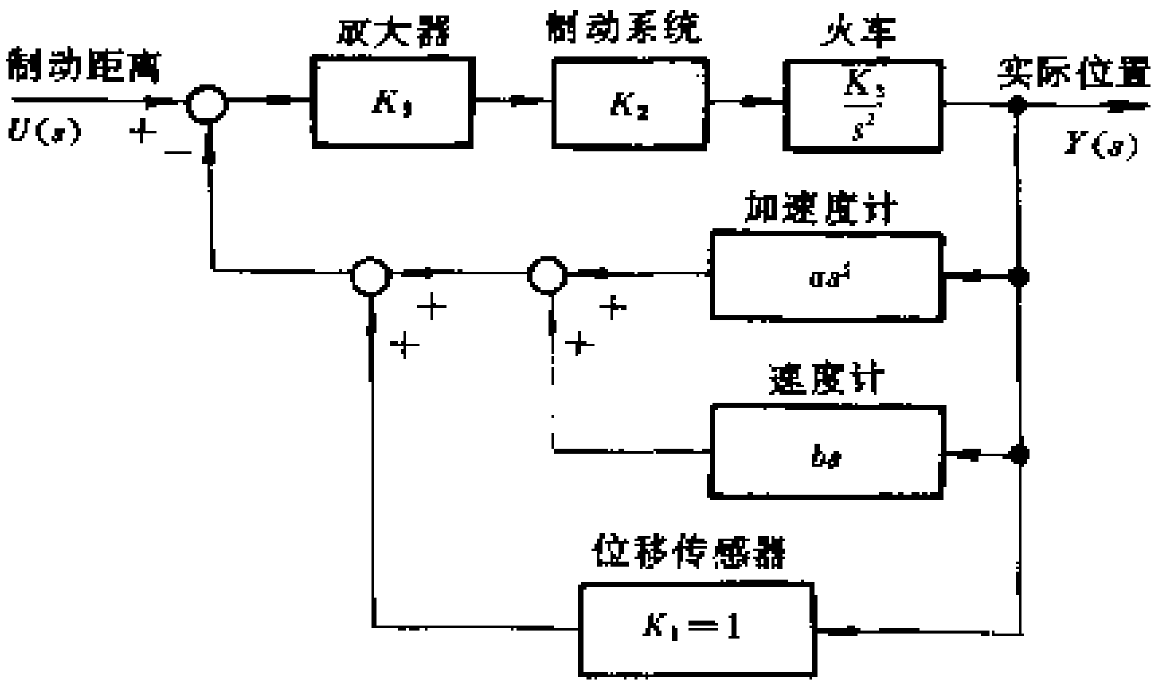


图 9-9

12. 图 9-10 表示国家经济活动模型. 它涉及到国民收入、政

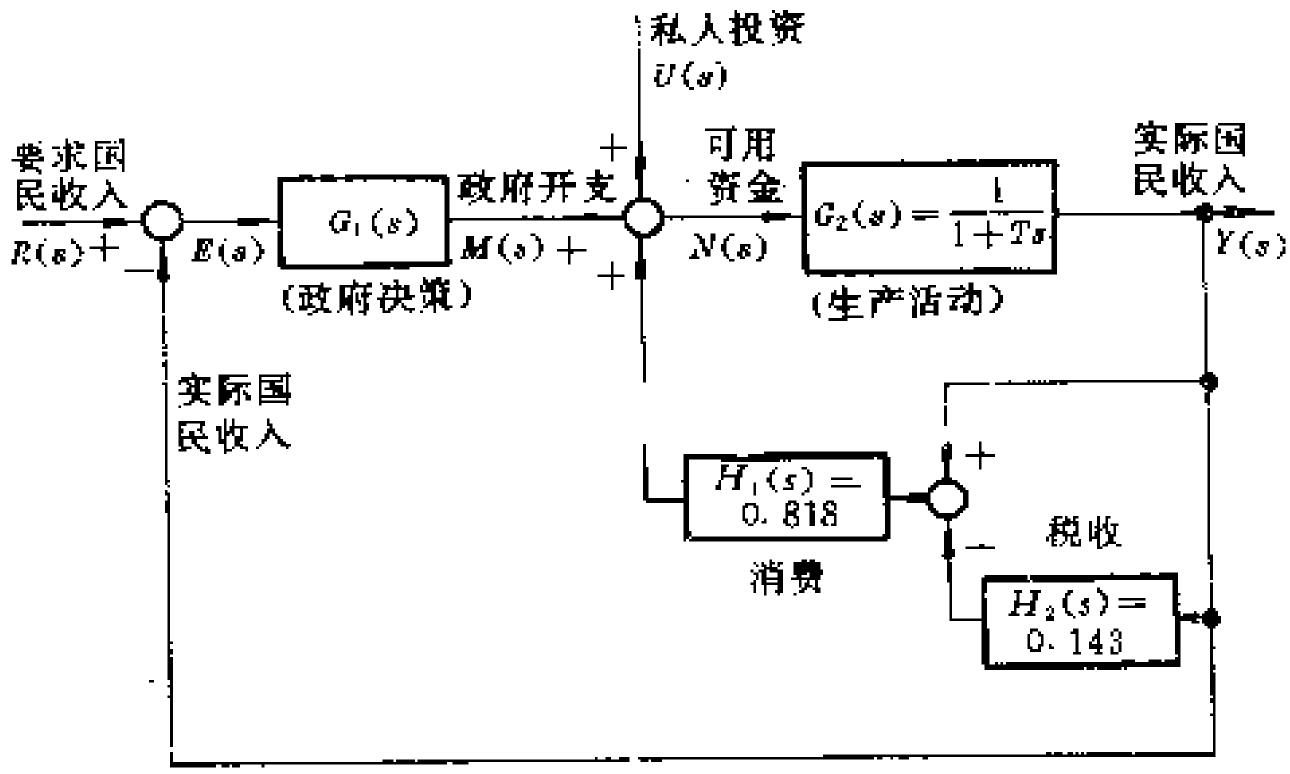


图 9-10

府消费决策、私人投资、企业生产、税收和顾客消费等.图中假定企业生产可用纯时间滞后的一阶惯性环节来描写,并且假定私人投资 U(s)和 E(s)的关系为

$$U(s) = -(A + Bs)E(s)$$

政府决策为

$$G_1(s) = C + Ds$$

试确定系统稳定时 C、D 与 A、B 的关系.

13. 图 9-11 是 ω 正半枝的开环频率特性曲线.(i)画出完整的乃奎斯特图.(ii)假定开环传递函数在右半平面没有极点.试判断系统的稳定性.

14. 电脉冲可以刺激肌肉使瘫痪关节恢复运动.图 9-12(a)是控制过程示意图.电子控制器发出两路信号,一路刺激主动肌收缩,另一路使拮抗肌伸展.图 9-12(b)是系统的方块图.控制器和关节运动的传递函数分别为

$$G(s) = A; H(s) = \frac{\Phi(s)}{I(s)} = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(Js + C)}$$

参数取值为 $J=1, C=20, \tau=0.1, K=1$. 当 $A=2$ 和 $A=100$ 时分

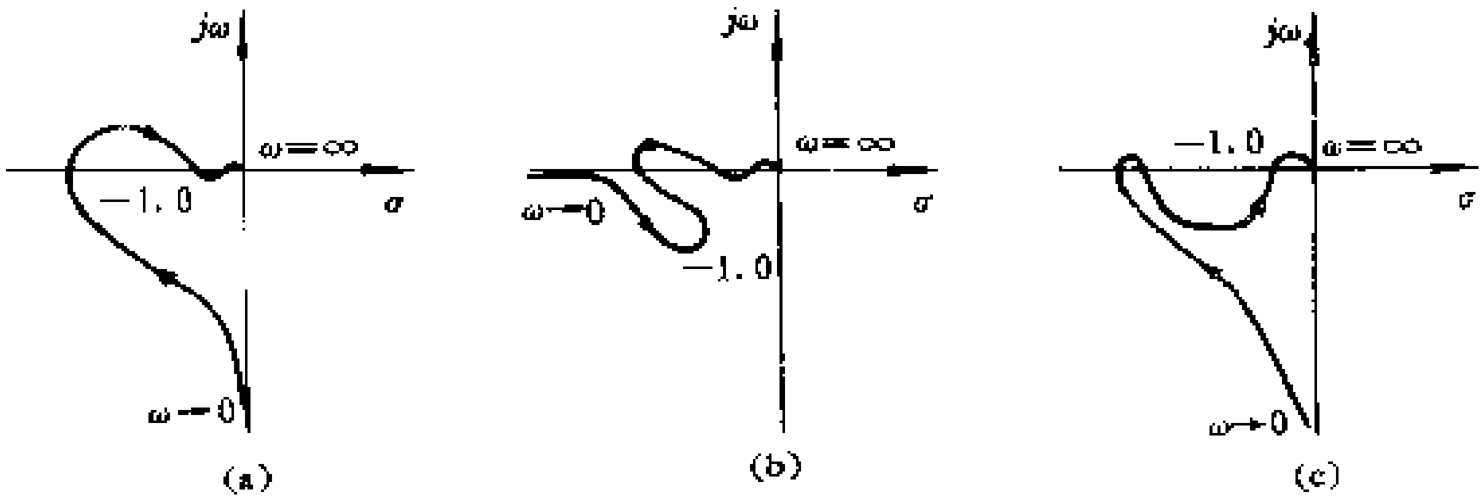


图 9-11

别求出相位裕量.

15. 反馈控制系统方块图如图 9-13 所示. $R(s)$ 为正常输入信号, $U(s)$ 为额外输入信号.

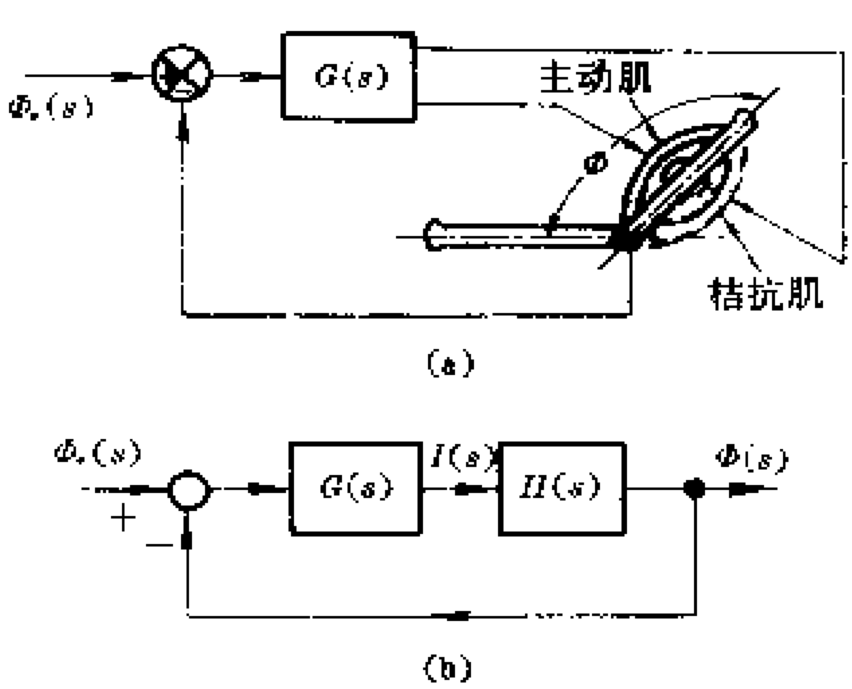


图 9-12

(i) 令 $G_1(s)=1$, 求该系统的对数频率特性图.

(ii) 要求由额外输入信号 $U(s)$ 引起的稳态偏差等于 0.1. 设 $U(s)=1$, $G_1(s)=K$, 求 K.

(iii) 在(ii)的条件下, 求增益穿越频率 ω_K 和相位裕量 r.

(iv) 如果要求相位裕量提高到 65°(ω_c 不变)而采用两个相位超前网络, 即令

$$G_1(s)=K\frac{T_1s+1}{T_2s+1}\cdot\frac{T_3s+1}{T_4s+1}$$

K 为(ii)中已求出之值, 试求出 T_1, T_2, T_3, T_4.

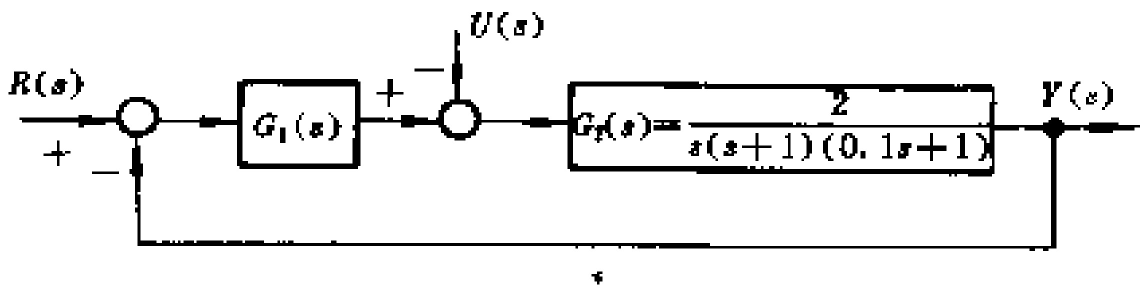


图 9-13

第三章 最优控制理论

在第二次世界大战期间及其以后的一段时间内，以提高武器命中率为主要目标的伺服系统理论，即经典控制理论，得到了迅猛的发展. 这一理论在设计与分析单输入单输出的线性定常系统时，是行之有效的. 然而，随着空间技术的发展，控制系统日趋复杂，其精度要求愈益提高，那种建立在传递函数和频率特性法基础上的经典控制理论日益暴露出其局限性来*. 这种局限性首先表现在系统变化的时间过程非常迅速，已不能简单地用线性定常系统来描写. 这样，传递函数已失去其定义的基础. 其次，应用频率特性来设计控制系统，就本质而言，是一种半经验的工程方法. 对于精度要求高的复杂系统，难以凑效. 最优控制理论就在这样的背景下发展起来.

人们注意到 18 世纪末和 19 世纪发展起来的经典力学的变分原理以及随后被推广到物理学其它分支的泛函极值理论成了最优控制理论可以借鉴的基础. 从而吸引了一大批力学家、应用数学家，甚至一些物理学家从事这方面的工作，推进着最优控制理论的发展. 最优控制理论主要发展表现在：直接应用古典的变分理论所能解决的，只是其容许控制属于开集的一类最优控制问题；而现代控制论所更多碰到的是，其容许控制属于闭集一类的问题. 其中最值得一提的应当是美国学者贝尔曼(R. Bellman)的动态规划理论(1953—1957 年创立)和苏联学者庞特里亚金(Л. С. Понтрягин)的

* 关肇直：现代控制理论中的几个文题，《计算机应用与应用数学》，NO：2，3，6 (1974)

"最小值原理"(1956--1958 年建立).

最优控制理论是和数值计算技术的发展密切相关的. 本课程限于篇幅,只能介绍连续量的控制理论. 但在实际应用时,还必须和计算数学联系起来. 目前这一领域仍然十分活跃,它不仅应用于工程控制方面,而且已被广泛应用于社会经济各个领域.

本章从讨论线性反馈系统的最小偏差设计准则出发,逐渐过渡到最优控制的基本理论.

§1 最小偏差设计准则

在伺服系统的性能指标中存在着互相对立的因素. 在控制系统的设计过程,常常根据经验数据去处理和协调各方面的需要. 例如提高反馈系统的开环增益,可以减小系统的稳态偏差,从而提高系统的控制准确度. 但是,开环增益的提高却又降低了系统的相对稳定性,那么是否存在一种严格的数学方法去调整系统的参数,使控制系统的性能既照顾到稳定性又照顾到稳态偏差呢? 这就不仅要注意到偏差的稳态值. 同时也要注意到偏差在过渡过程的变化. 由于系统的超调量也和伺服系统的稳定度相联系,超调量越大,稳定性越差,或者说在过渡过程最初阶段,系统瞬态偏差越小,稳定性越好,这就提出这样一个问题:统筹考虑偏差的全过程. 使偏差的总和降低到最小值,使系统稳定性和准确性方面协调到一种最优状态. 由于控制系统的偏差可以是正的,也可以是负的,所以这里所说的偏差的总和应当是指绝对值之和,或者偏差平方的总和. 把这种考虑用数量来表示. 就是要求

$$\int_0^\infty |e(t)| \mathrm{d}t = \min. \tag{1.1}$$

或者

$$\int_0^\infty e^2(t) \mathrm{d}t = \min. \tag{1.2}$$

如果设计时为了加强某一方面的权重，比如更加注意系统的稳态偏差，就可以在积分表达式中乘上一个与时间有关的权函数，比如时间 t. 这样，式(1.1)和式(1.2)就可相应地变为

$$\int_0^{\infty} t|e(t)|\mathrm{d}t = \min \tag{1.3}$$

以及

$$\int_0^{\infty} te^2(t)\mathrm{d}t = \min \tag{1.4}$$

由于式(1.2)所表示的最小方差准则便于用解析方法进行研究，所以用得最多. 图 1-1 给出 $u(t)$，$y(t)$，$e(t)$，$e^2(t)$和 $\int e^2(t)\mathrm{d}t$ 随时间的变化关系.

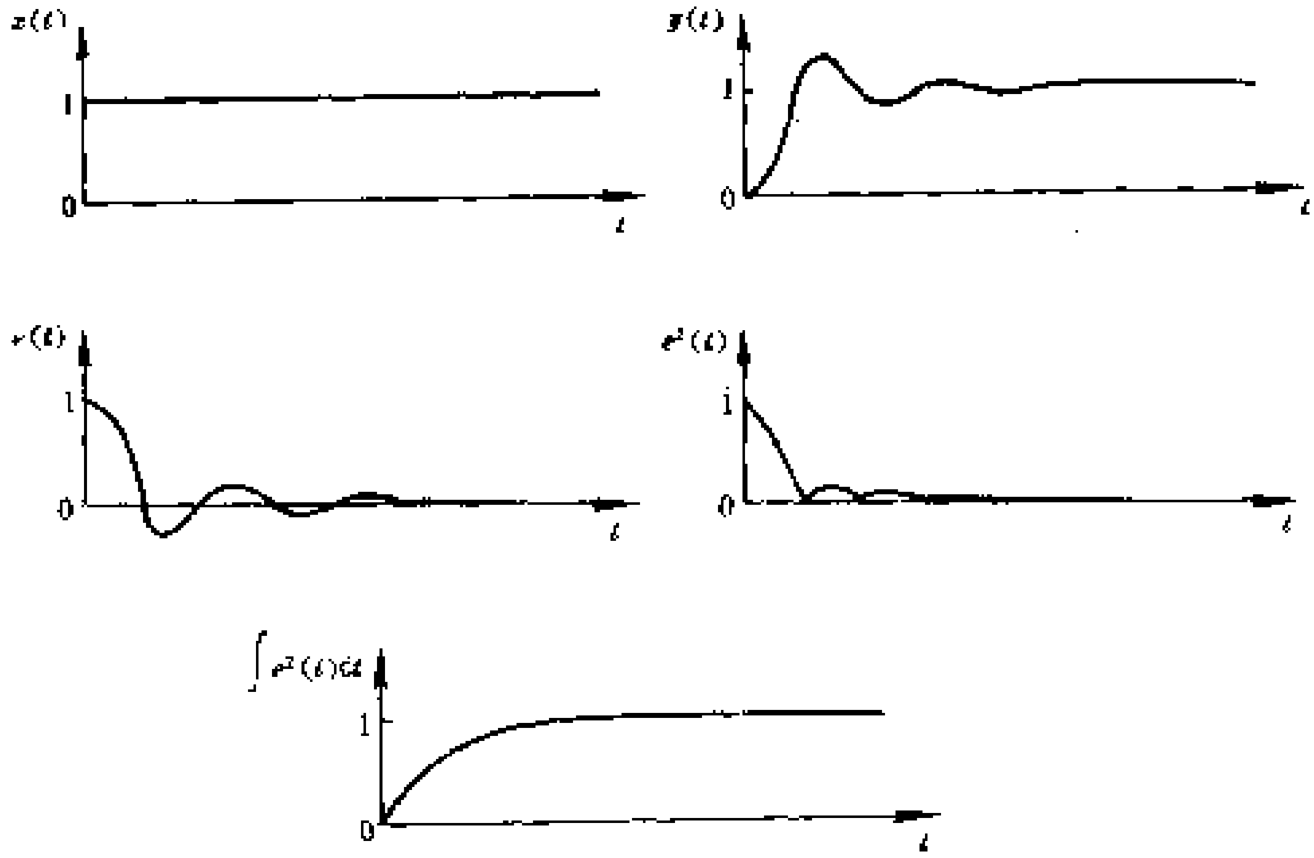


图 1-1　期望的输出 $u(t)$、实际的输出 $y(t)$、偏差 $e(t)$、平方偏差 $e^2(t)$ 和平方偏差的积分 $\int e^2(t)dt$ 对 t 的函数曲线

下面举例说明，如何应用这些最优准则来确定系统的参数. 图 1-2 是一个二阶振荡系统，可调参数是比阻尼 ξ，假定系统的输入

是单位阶跃函数，我们讨论如何应用式(1.2)：

$$J=\int_0^{\infty}e^2(t)\mathrm{d}t=\min$$

来确定 ζ 之值.

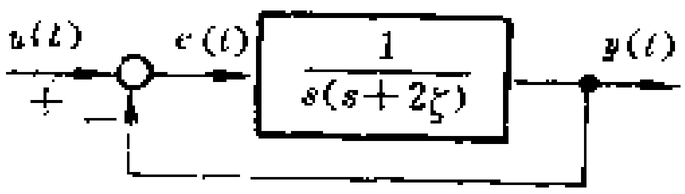


图 1-2 二阶振荡系统

可以看出，系统的闭环传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2\zeta s+1} \tag{1.5}$$

在时间域，系统的输出应满足方程

$$\ddot{y}(t)+2\zeta\dot{y}(t)+y(t)=u(t)\quad(t>0) \tag{1.6}$$

图 1-2 是单位反馈系统. 令 $e(t)=u(t)-y(t)$，于是

$$\ddot{e}(t)+2\zeta\dot{e}(t)+e(t)=0\quad(T>0) \tag{1.7}$$

上式假定了 $u(t)$ 为单位阶跃输入，方程(1.7)的解可以写成

$$e(t)=k_1e^{\lambda_1 t}+k_2e^{\lambda_2 t} \tag{1.8}$$

其中

$$\lambda_1=-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1};\quad \lambda_2=-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}$$

式(1.8)中的常数 k_1 和 k_2 将根据初始条件确定.

把方程(1.8)代入方程(1.7)中，并注意 λ_1 和 λ_2 有负的实部，可得

$$\begin{aligned}J&=\int_0^{\infty}e^2(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}(k_1^2e^{2\lambda_1 t}+2k_1k_2e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}+k_2^2e^{2\lambda_2 t})\mathrm{d}t\\&=-\frac{k_1^2}{2\lambda_1}-\frac{2k_1k_2}{\lambda_1+\lambda_2}-\frac{k_2^2}{2\lambda_2}\end{aligned}$$

因为 $\lambda_1+\lambda_2=-2\zeta$，$\lambda_1\lambda_2=1$，我们可将 J 简化成

$$J=-\frac{k_1^2\lambda_2+k_2^2\lambda_1}{2}-\frac{k_1k_2}{\zeta} \tag{1.10}$$

根据初始条件 $e(0)=1, \dot{e}(0)=1$，又由于式(1.8)，于是

$$1 = k_1 + k_2, \quad 0 = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$$

即

$$k_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$k_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

以 k_1 和 k_2 之值代入方程(1.10)中，可得

$$J = -\frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\left(\lambda_2^3 + \lambda_1^3 + \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\zeta}\right)$$

$$= -\frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\left\{(\lambda_1 + \lambda_2)[(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 3\lambda_1\lambda_2] + \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\zeta}\right\}$$

$$= \zeta + \frac{1}{4\zeta}$$

据此，ζ 的最优值可用 J 对 ζ 求导数来得到. 使 $dJ/d\zeta$ 等于零，并对 ζ 求解. 因为

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\zeta} = 1 - \frac{1}{4\zeta^2} = 0$$

$\zeta>0$ 的最优值是

$$\zeta^* = 0.5$$

很明显，因为 $\mathrm{d}^2J/\mathrm{d}\zeta^2>0$，$\zeta=0.5$ 对应于极小值. J 的极小值是

$$J_{min} = 0.5 + 0.5 = 1$$

按照类似的方法可以用其他最优化准则来确定 ζ 值. 图 1-3 表示几种不同的偏差函数的积分的性能曲线. 可以发现偏差平方积分准则选择性不好，因为在 ζ 最优值附近，曲线相当平坦. 同时还可看出选择性较好的几种曲线，ζ 的最优值都在 0.7 附近. 这时二阶系统的响应速度较快，超调量大约为 5%.

问题的这种提法使控制系统的设计摆脱了试凑法，变成选择比较合理的性能指标的问题，从而可能解决比较复杂的问题，例如

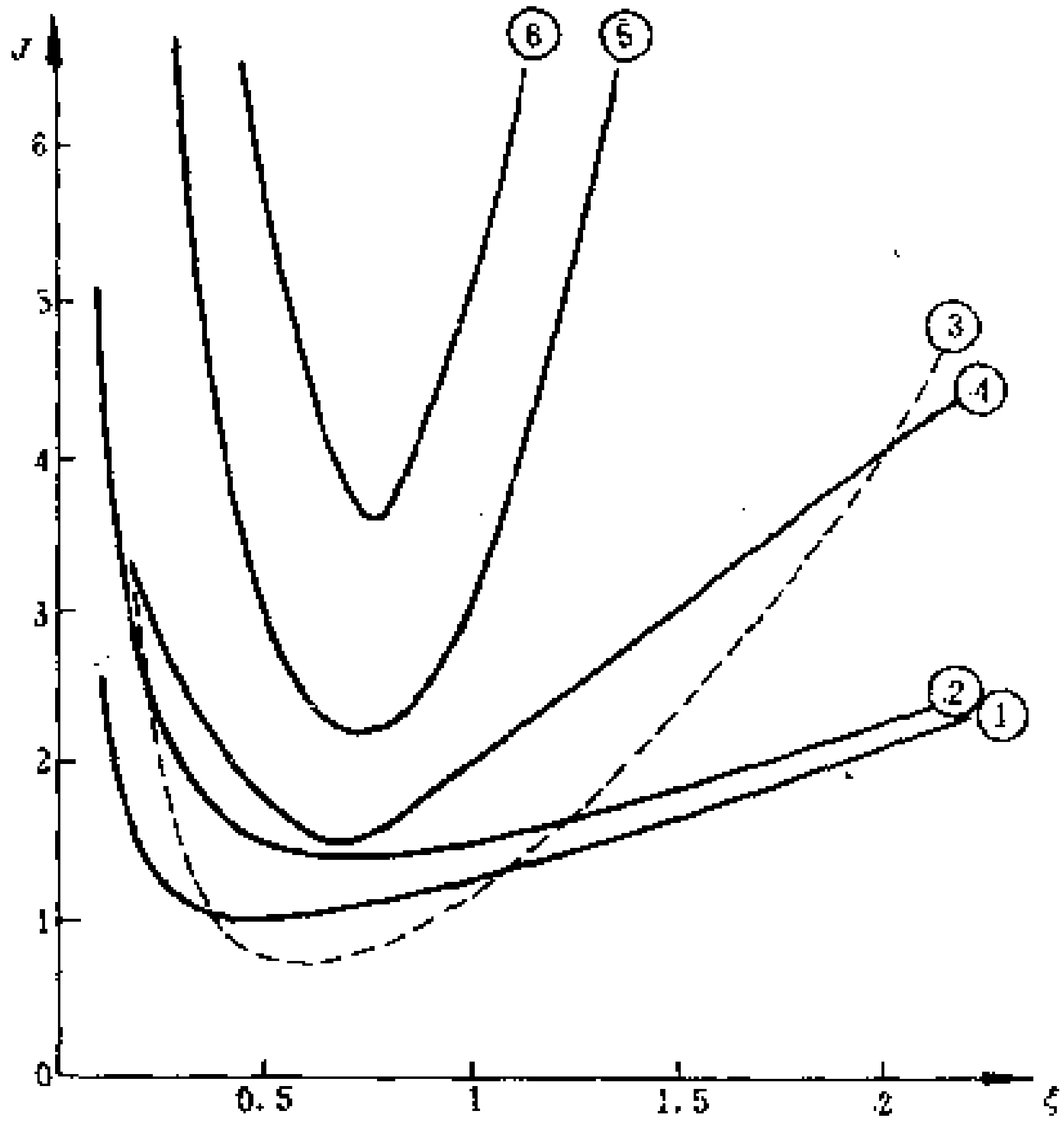


图 1-3　偏差性能曲线

火箭设计中的最小时间问题，最小脱靶量问题和最小燃料消耗问题等等. 这是由偏差最优化的讨论所引出的十分有意义的方向. 然而，由于在上例中，首先从输出方程(1.6)或偏差方程(1.7)，(或者从根本上说是从状态方程)解出包含待定参数 ξ 的解，再代入性能指标的积分关系中，然后才能按最优化原则求出待定参数之值 ξ. 把这个 ξ 再代回到输出方程中去才能求出满足最优性能指标的输出方程. 这么多步骤显得繁锁. 后面我们讨论按照最优化准则直接确定最优化状态变量所应满足的方程.

① $J=\int_0^{\infty} e^2 \mathrm{d}t$　② $J=\int_0^{\infty}(e^2+\dot{e}^2)\mathrm{d}t$　③ $J=\int_0^{\infty} te^2 \mathrm{d}t$

④ $J=\int_0^{\infty}|e|\mathrm{d}t$　⑤ $J=\int_0^{\infty} t|e|\mathrm{d}t$　⑥ $J=\int_0^{\infty}(|e|+|\dot{e}|)\mathrm{d}t$

§2　变分原理

一、问题的提法

前面关于二阶振荡环节的讨论表明：不同的比阻尼系数 ξ 对应不同的输出的过渡响应 $y(t)$，在 $y-t$ 坐标中画出不同的曲线．对应于 $\xi=0.5$ 的 $y-t$ 曲线使系统所要求的性能指标——偏差平方积分值最小．

对于一般比较复杂的系统，应由状态变量和状态方程来描写．输出过渡响应决定于状态变量与时间的关系 $\boldsymbol{x}(t)$．对应于单输入单输出系统的 $y-t$ 坐标系的应是状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的 n 个分量 $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 和时间 t 所构成的坐标系 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$，由这个坐标系描写的空间称为 $n+1$ 维增广状态空间．如果系统的状态变量和时间的关系为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t) \tag{2.1}$$

或写成分量形式：

$$\begin{cases} x_1=x_1(t) \\ x_2=x_2(t) \\ \quad\vdots \\ x_n=x_n(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

那么这个关系将在 $(n+1)$ 维增广状态空间描画出一条曲线．这条曲线称为状态轨迹．它相当于二阶振荡系统的 $y-t$ 曲线．为形象起见，在图 2-1 中画出一维状态变量的 $(1+1)$ 维增广状态空间的轨迹．实线表示使某种性能指标取最优值的状态变量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(t)$ 所描画的轨迹，称为最优轨迹．虚线表示非最优轨迹．有时需要特别加以区分时，在状态变量的符号右上角加以“ * ”表示最优．

根据不同的要求系统最优化的性能指标是不同的．§1 中讨论了最小偏差设计准则，也提出了各种不同的性能指标．一般地

说，性能指标是关于时间的定积分，被积函数是时间 t 和状态变量 $\boldsymbol{x}(t)$ 及其导数 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 的复合函数，记作 $F[x(t),\dot{x}(t),t]$. 为简化起见，常常写成 $F(x,\dot{x},t)$，并称为亏损函数，于是性能指标可以写成积分.

$$J=\int_{t_0}^{t_f}F(x,\dot{x},t)\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

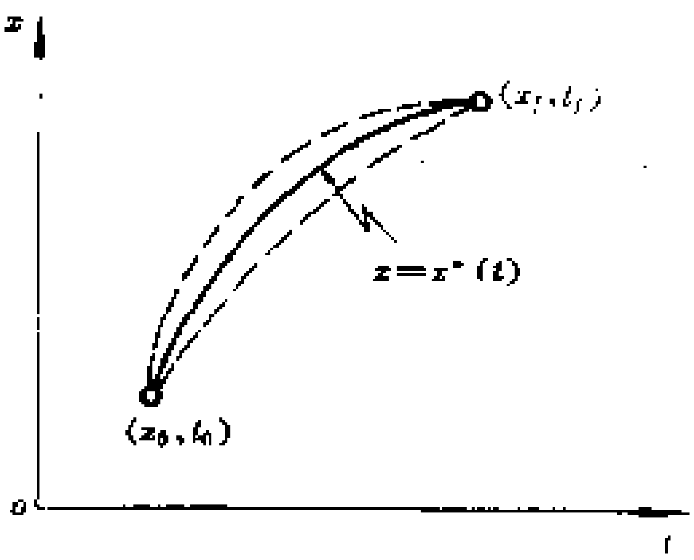


图 2-1 $x-t$ 增广状态空间和状态轨迹

式中积分下限 t_0 为初始时间，积分上限 t_f 为终端时间. 由于 J 是由定积分定义的，因而具有确定的数值. 但是如果状态方程中包含一些待定参数，如 §1 中的 ζ，那么状态变量与时间的关系也与这些待定参数有关，比如 $y(\zeta,t)$. 这时，待定参数的不同值影响着状态变量和时间的对应关系 $\boldsymbol{x}(t)$，因而定积分 J 之值也不同. 这就是说，J 是待定参数的函数，而待定参数是通过改变 $\boldsymbol{x}(t)$ 的函数关系而改变 J 的数值的. 这种函数，数学上称为泛函数，或简称泛函.

另一方面，从增广状态空间来看，参数取值的微小变化将引起状态轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$ 的微小变更，如图 2-1 所示. 这种状态轨迹的微小变更引起的泛函 J 的数值的微小变化称为变分. 如果存在状态变量的函数关系 $\boldsymbol{x}^*(t)$（即状态轨迹），使 J 取极小值，即

$$J=\int_{t_0}^{t_f}F[\boldsymbol{x}^*(t),\dot{\boldsymbol{x}}^*(t),t]\mathrm{d}t=\min \tag{2.4}$$

则在 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 附近，J 的变分必为零，即

$$\delta J=\delta\int_{t_0}^{t_f}F[\boldsymbol{x}^*(t),\dot{\boldsymbol{x}}^*(t),t]\mathrm{d}t=0 \tag{2.5}$$

式(2.5)就是性能指标最优化的数学表示. 为简便起见，我们常常

不在 F 的函数关系中特别标出"*"号，而简单地用一般的 $F(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)$ 来表示. 由于一阶变分为零是 J 取极小值的必要条件，因此，严格地说，式(2.5)成立是系统实现最优控制的必要条件.

下面按不同具体情况，讨论根据极值条件(2.5)式，确定最优轨迹 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 的数学方法.

二、固定终端的变分问题

设被比较的状态轨迹的两端点都固定在 $(\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 和 $(\boldsymbol{x}_f,t_f)$ 上. 如用分量表示，即

$$\begin{cases} x_1(t_0)=x_{10} \\ x_2(t_0)=x_{20} \\ \quad\vdots \\ x_n(t_0)=x_{n0} \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} x_1(t_f)=x_{1f} \\ x_2(t_f)=x_{2f} \\ \quad\vdots \\ x_n(t_f)=x_{nf} \end{cases}$$

根据含参数积分的求导数法则，式(2.5)的变分符号可以移入积分号，有

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\delta F(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)\mathrm{d}t=0 \tag{2.9}$$

F 是 $x(t)$，$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 和 t 的复合函数. δF 是指同一时刻不同状态轨迹所对应的 F 值之差. 这是因为系统含有一些待定参量. 它们的取值不同将使状态变量和时间关系也不同. 如果把同一时刻 t 由于参数的不同所引起的状态变量的变更记作 $\delta\boldsymbol{x}$，相应地也有 $\delta\dot{\boldsymbol{x}}$；并且由于 $\boldsymbol{x}$ 是由 n 个分量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 组成. 于是

$$\delta F=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i \tag{2.10}$$

$\delta\dot{x}_i$ 是向量 $\delta\dot{\boldsymbol{x}}$ 的分量. 由于 $\delta\dot{x}_i$ 是指同一时刻不同参数引起的 $\dot{x}_i$ 之值的变更，这种变更和对时间的微分是独立的，于是有

$$\delta\dot{x}_i = \delta\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.11}$$

将上式代入式(2.10)，经整理可得

$$\delta F = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i \tag{2.12}$$

上面考虑了

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\frac{\mathrm{d}\delta x_i}{\mathrm{d}t} \tag{2.13}$$

将式(2.12)代入式(2.9)，可得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i\bigg|_{t_0}^{t_f} = 0 \tag{2.14}$$

考虑到边界条件，式(2.7)和式(2.8)始端和终端都是固定的，于是上式左边第二项为零. 由于各个状态变量 x_i 是相互独立的，于是式(2.14)和下面方程组等价：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.15}$$

方程(2.15)是在两端固定条件下使泛函(2.1)式取极值的必要条件. 该方程在数学上称为一阶变分的欧拉(Euler)方程.

可以看出，只要亏损函数 $F(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)$ 给定，方程(2.15)就可以确定 n 个二阶微分方程. 这 n 个方程加上边界条件式(2.7)和式(2.8)就可解出 n 个状态变量. 这些变量就构成最优状态向量 $x^*(t)$，它使性能指标，式(2.1)，取最优值.

[例 1]设性能指标为

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2 + x^2)\mathrm{d}t$$

边界条件为 $x(0)=0$；$x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，求最优状态轨迹.

〔解〕由于 $F=\dot{x}^2-x^2$，且

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=2\dot{x};\quad \frac{\partial F}{\partial x}=2x$$

代入欧拉方程(2.15)，得

$$\ddot{x}-x=0$$

上式的解为

$$x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}$$

考虑边界条件，求得最优状态轨迹为

$$x(t)=\frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

三、待定终端变分问题

在自动控制问题中，很大一类问题终端是不固定的. 例如地对空导弹的控制，其目的是击中飞行着的飞机，即所谓拦截问题. 假定飞机的运动在增广状态空间的轨迹是

$$x_{if}=c_i(t_f)\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.16}$$

导弹在 $t=t_0$ 时，于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t_0)$ 处发射去追击飞机. 导弹运行轨迹不同或加速方式不同都会使它和飞机相遇的时间和位置都不同. 这将受到式(2.16)的约束. 在这种情形下求某些指标最优(例如弹着点最精确)的问题，就是一个待定终端的变分问题.

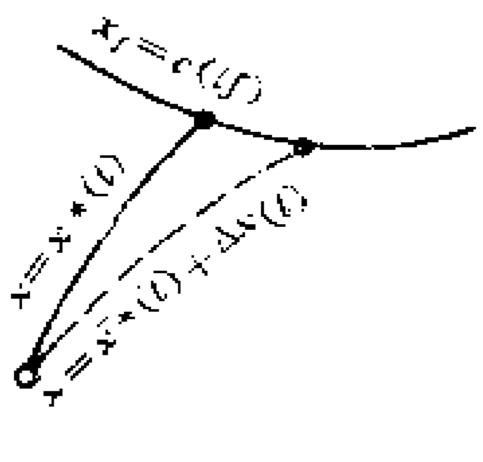


图 2-2 待定终端问题

为更一般起见，假定终端受到以下 r 个方程的约束：

$$\psi_j(\boldsymbol{x}_f,t_f)=0\qquad (j=1,2,\cdots,r) \tag{2.17}$$

此处 $r\leqslant n$，显然当 $r=n$，式(2.17)就归结为式(2.16). 有时为方便

起见，将式(2.17)写成 r 维向量形式：

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_f, t_f) = 0 \tag{2.18}$$

在这里始端仍然假定为固定，即式(2.7)仍可应用.

现在讨论这种情形下的变分，这时有

$$\Delta J = \delta\int_{t_0}^{t_f} F(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)\mathrm{d}t + F(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)\Delta t\Big|_{t_0}^{t_f} \tag{2.19}$$

ΔJ 称为不等时变分. 可以看出，上式右边第二项就是 ΔJ 和等时变分 δJ 之差，根据前面的讨论有

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\Big|_{t_0}^{t_f} \tag{2.20}$$

将上式代入式(2.19)得

$$\begin{aligned}\Delta J = &\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i \mathrm{d}t \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\Big|_{t_0}^{t_f} + F\Delta t\Big|_{t_0}^{t_f}\end{aligned} \tag{2.21}$$

考虑到始端固定，有 $\Delta t_0 = 0$；$\delta x(t_0) = 0$，待定终端问题的最优条件可以写成

$$\begin{aligned}\Delta J = &\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i \mathrm{d}t \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i + F\Delta t\right)_{t=t_f} = 0\end{aligned} \tag{2.22}$$

上式第二个括号中的 δx_i 是指当 $t=t_f$ 时状态变量的等时变更，即当 $t=t_f$ 时不同状态轨迹之间所对应的状态变量之差. 但在本问题中，不同的状态轨迹，终端时间 t_f 也是不同的. 假定在满足终端约束条件式(2.17)的情况下，当 t_f 有变更 Δt_f，对应的状态变量的变更为 $\Delta x_i(t_f)$，那么它应当是等时变更 $\delta x_i(t_f)$ 和沿状态轨迹的微分 $\mathrm{d}x_i(t_f)$ 之和(如图 2-3)：

$$\Delta x_i(t_f) = \delta x_i(t_f) + \dot{x}_i(t_f)\Delta t_f \tag{2.23}$$

于是 $$\delta x_i(t_f) = \Delta x_i(t_f) - \dot{x}_i(t_f)\Delta t_f \qquad (2.23a)$$

代入式(2.22)可得

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i \mathrm{d}t + \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Delta x_i + \left(F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}\right) \Delta t \right]_{t=t_f} = 0 \qquad (2.24)$$

现在考虑式(2.17)对 $\Delta x_i(t_f)$ 之间的约束. 对式(2.17)求微分,有

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \Delta t \right]_{t=t_f} = 0 \qquad (2.25)$$

式中 Δx_i 和 Δt 的意义和前面一样,表示 $(n+1)$ 维增广状态空间不同轨迹之间的不等时变分. 对式(2.25)各个方程分别乘以待定参数 ν_j,然后相加得

$$\sum_{j=1}^{r} \nu_j \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \Delta t \right]_{t=t_f} = 0 \qquad (2.26)$$

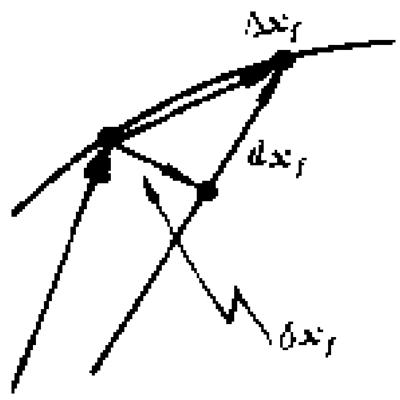


图 2-3

将上式和式(2.24)相加,可得

$$\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i \mathrm{d}t + \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{j=1}^{r} \nu_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right) \Delta x_i + \left(F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{j=1}^{r} \nu_j \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) \Delta t \right]_{t=t_f} = 0 \qquad (2.27)$$

由于存在 r 个待定参数 $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r)$,假定它们选取适当,总可以使式(2.27)中 r 个 $\Delta x_i(t_f)$ 的系数为零. 但是,由式(2.17)加于 n 个 $x_i(t_f)$ 之间的约束是 r 个,其余 $(n-r)$ 个 $\Delta x_i(t_f)$ 是独立的,这些

$\Delta x_i(t_f)$和Δt_f的系数应当为零. 这就是说,式(2.27)中所有的δx_i,$\Delta x_i(t_f)$和Δt_f的系数都为零. 于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial F}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.28}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}+\sum_{j=1}^{r}\nu_j\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\right]_{t=t_f}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.29}$$

$$\left[F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i+\sum_{j=1}^{r}\nu_j\frac{\partial \psi_j}{\partial t}\right]_{t=t_f}=0 \tag{2.30}$$

式(2.28)就是前面提到的欧拉方程. 式(2.29),式(2.30)和式(2.17)一起,一共是$n+r+1$个方程. 它们可以确定r个待定参数ν_j,n个终端状态变量$x_i(t_f)$以及终端时间t_f. 式(2.29)和式(2.30)称为横截条件,这些方程再加上初始条件(2.7)式,就可以完全确定使系统性能指标取最优值的n个状态变量与时间的关系曲线$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$.

r个待定参数$(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_r)$可以记作向量$\nu$,这些参数是拉格朗日(Lagrange)最早为讨论经典力学问题而引入的,称为拉格朗日不定乘子. 在由方程(2.27)推出方程(2.28)—(2.30)的过程中,由于引入了r个不定乘子ν_j,本来受r个约束的不独立的Δx_i可看作n个独立变量这样就可要求每个Δx_i的系数都为零. 从而得到方程(2.29)和(2.30). 这个过程称为约束解除. 下面还会用到这种方法.

〔例2〕求使性能指标

$$J=\int_0^{t_f}(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

为极小的$x(t)$曲线. 设始端固定,$x(0)=1$,终端在直线$x_f+t_f-2=0$上变动,如图2-4所示.

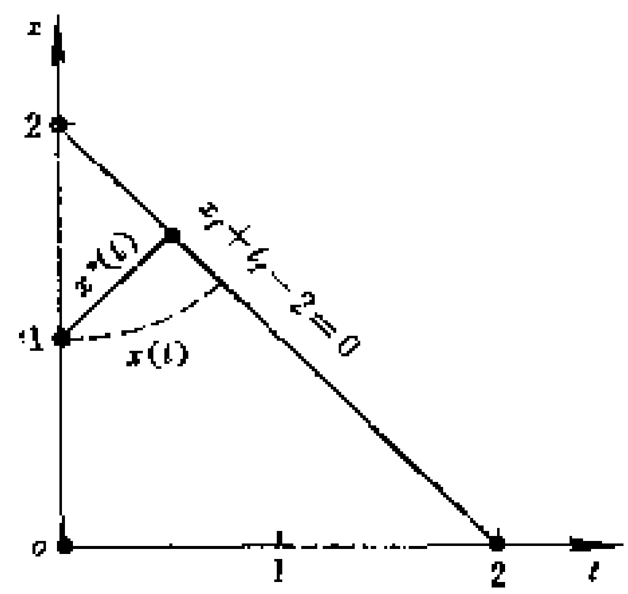


图2-4　t_f未给定而使$J(x)$为极小的极值曲线

〔解〕很明显，性能指标就是曲线 $x(t)$ 的弧长，也就是说，要求从 $x(0)$ 到直线 $c(t)$ 的曲线 $x(t)$ 的弧长为最短. 应用欧拉方程可得到最优轨线 $x^*(t)$.

性能指标 J 中的被积函数为

$$F(x,\dot{x},t) = (1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}$$

其一阶偏导数为

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{A1}$$

代入欧拉方程，可得

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\dot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0$$

因此

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\dot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0 \tag{A2}$$

上式经过一次积分后得到

$$\frac{\dot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}} = C, \qquad \dot{x}^2 = \frac{C^2}{1-C^2} = a^2$$

即

$$\dot{x} = a$$

积分后得到

$$x(t) = at + b \tag{A3}$$

下面利用边界条件来确定常数 a 和 b. 已知 $x(0)=1$，则得 $b=1$，在 $t=t_f$ 时的约束条件为

$$\psi = x(t_f) + t_f - 2 = 0, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\mathrm{d}x}\right|_{t_f} = 1, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{t_f} = 1 \tag{A4}$$

代入方程(2.29)和(2.30)，得

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \nu = 0, \quad F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \nu = 0$$

从两式消去 ν，并代入 F 的函数关系，可得

$$(-1-\dot{x})\frac{\dot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}+(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}=0$$

简化后得 $\dot{x}=1$，因为 $\dot{x}=\alpha$，所以 $\alpha=1$，因此最优轨线为

$$x^*(t)=t+1 \tag{A5}$$

终端时间由最优轨迹和终端曲线的交点决定，将(A_4)第一式和(A_5)式联合起来，就可得到

$$t_f+1=2-t_f$$

于是 $t_f=\frac{1}{2}$.

§3 不受限制的动态最优控制

一般地说，系统状态轨迹的变化可以受两方面的因素的影响：一方面是系统内部结构的变化；另一方面是输入量的改变. §2 已经从系统内部结构参数的改变，即状态方程含有待定参数的角度讨论了性能指标最优化问题. 这一节着重讨论改变系统的输入量来实现性能指标的最优化. 这种控制方法为动态最优控制，输入变量在这里称为控制变量.

一、 终端固定情形

设系统的状态方程为

$$\dot{x}_i=f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.1}$$

式中 $\boldsymbol{u}(t)$ 有 l 个分量($u_1,u_2,\cdots,u_l$). 现在讨论改变控制变量 $\boldsymbol{u}(t)$. 来实现性能指标

$$J=\int_{t_0}^{t_f}F(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)\mathrm{d}t \tag{3.2}$$

最优. 我们强调指出，这里假定方程(3.1)是确定的，不含待定参数，$\boldsymbol{x}(t)$ 的变化是由 $\boldsymbol{u}(t)$ 的变化引起的，由于 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 存在着函数关系(3.1)式，于是被积函数

$$F(\boldsymbol{x}(t),\dot{\boldsymbol{x}}(t),t)=F[\boldsymbol{x}(t),f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t),t] \tag{3.3}$$

为方便起见，直接写成 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}$ 和 t 的函数：$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$。这时式(3.2)变为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\mathrm{d}t \tag{3.4}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 之间受状态方程(3.1)的约束.

式(3.1)可以改写为约束方程的形式：

$$f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)-\dot{x}_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.5}$$

为在下面推导过程中解除 x_i 和 u_k 中间的这些约束，引入 n 个不定乘子 $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t)$. 这些不定乘子与时间的函数关系待定，但它们与 $\boldsymbol{u}(t)$ 无关. 把这些不定乘子分别去乘式(3.5)所表示的 n 个方程，并对 i 取和，再对 t 求积分可得：

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\dot{x}_i\right]\mathrm{d}t=0 \tag{3.6}$$

将式(3.6)的左边加到式(3.4)的右边，于是

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\left[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\dot{x}_i\right]\mathrm{d}t \tag{3.7}$$

引入新函数

$$H=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{3.8}$$

H 称为**哈密顿函数**. 可以看出，H 是 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u}$ 和 t 的函数，即

$$H=H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t) \tag{3.9}$$

于是式(3.7)变为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\left[H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\dot{x}_i\right]\mathrm{d}t \tag{3.10}$$

注意到

$$\lambda_i\dot{x}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda_i x_i)-\dot{\lambda}_i x_i \tag{3.11}$$

式(3.10)变为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\left[H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t)+\sum_{i=1}^{n}\dot{\lambda}_i x_i\right]\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big|_{t_0}^{t_f} \tag{3.12}$$

根据前面的讨论可知，使性能指标 J 取极小值的必要条件是

$$\delta J=\delta\int_{t_0}^{t_f}\left[H+\sum_{i=1}^{n}\dot{\lambda}_i x_i\right]\mathrm{d}t-\delta\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big|_{t_0}^{t_f}$$

假定两端固定，边界条件由式(2.7)和式(2.8)给出.这时变分符号 δ 可以移入积分号，并注意到变分是由 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\boldsymbol{x}(t)$ 的变迁引起的，与 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 无关，于是

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\delta x_i-\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k\right)+\sum_{i=1}^{n}\dot{\lambda}_i\delta x_i\right]\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}=0 \tag{3.13}$$

因此，

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}+\dot{\lambda}_i\right)\delta x_i+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k\right]\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta x_i\Big|_{t_0}^{t_f} \tag{3.14}$$

由于两端固定，上式左边最后一项为零，在积分号下，n 个 δx_i 和 l 个 δu_k 中间存在着由式(3.5)给出的 n 个方程的约束，但由于引入了 n 个不定子 $\lambda_i(t)$，可以使 n 个比如 δx_i 的系数为零，这时 l 个 δu_k 可以看成是独立的.于是所有 δx_i 和 δx_k 的系数都为零是方程(3.14)成立的必要且充分的条件，因而有

$$\frac{\partial H}{\partial u_k}=0\qquad(k=1,2,\cdots,l) \tag{3.15}$$

$$\dot{\lambda}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{3.16}$$

求式(3.8)两边对 λ_i 的偏导数，有

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}=f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

注意到式(3.1)，有

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{3.17}$$

$\lambda_i(t)$称为共态变量，式(3.16)和(3.17)一起称为正则方程.

在本问题中，状态方程是事先由式(3.1)给定的. 但式中所包含的控制变量的具体形式 $\boldsymbol{u}(t)$则是未知的. 它需要根据性能指标最优化加以确定. 根据前面的推导，$\boldsymbol{u}(t)$应当满足方程(3.15). 由于 $H=H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t)$，方程(3.15)给出了 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u}$ 之间的代数关系. 假定所给出的关系可以就 $\boldsymbol{u}$ 解出：

$$u_k^* = u_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},t) \qquad (k=1,2,\cdots,l) \tag{3.15a}$$

注意到正则方程(3.16)和(3.17)右边都是$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t)$的函数. 如果把 u_k 取最优值的函数关系式(3.15a)代入方程(3.16)和(3.17)，则它们变成仅含 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 的 $2n$ 个一阶微分方程组. 从而，原则上可以解出 n 个 $x_i^*(t)$ 和 n 个 $\lambda_i^*(t)$. 再把所求得的 $2n$ 个变量：$x_i^*(t)$ 和 $\lambda_i^*(t)$代入式(3.15a)，就可求得 l 个 $u_k^*(t)$. 这就是待求的最优控制变量 $u(t)$.

式(3.16)和式(3.17)决定了 $2n$ 个一阶微分方程，其积分常数可用边界条件式(2.7)和式(2.8)给出的 $2n$ 个关系式确定.

〔例 1〕设系统的状态方程为

$$\dot{x} = -x + u \tag{A1}$$

边界条件为 $x(0)=1, x(t_f)=0$，求最优控制使下面性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x^2+u^2)\mathrm{d}t$$

为最小.

〔解〕写出哈密顿函数：

$$H = \frac{1}{2}(x^2+u^2) + \lambda(-x+u)$$

其正则方程中的共态方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x+\lambda \tag{A2}$$

控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0; \qquad u = -\lambda \tag{A3}$$

于是状态方程变为：

$$\dot{x} = -x - \lambda \tag{A4}$$

由式(A2)和(A4)可得

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - \lambda \\ \dot{\lambda} = -x + \lambda \end{cases} \tag{A5}$$

应用第一章线性状态方程的解法，可解出：

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{2\sqrt{2}}\{[(\sqrt{2}+1)x(0)+\lambda(0)]e^{-\sqrt{2}t} \\ & + [(\sqrt{2}-1)x(0)-\lambda(0)]e^{\sqrt{2}t}\} \end{aligned} \tag{A6}$$

$$\begin{aligned} \lambda(t) = & \frac{1}{2\sqrt{2}}\{[x(0)+(\sqrt{2}-1)\lambda(0)]e^{-\sqrt{2}t} \\ & + [-x(0)+(\sqrt{2}+1)\lambda(0)]e^{\sqrt{2}t}\} \end{aligned} \tag{A7}$$

将边界代入(A6)可解出 $\lambda(0)$，再代入(A7)并考虑(A3)可得最优控制

$$\begin{aligned} u^*(t) = -\lambda(t) = & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\{[e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}] \\ & + \frac{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t_f} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t_f}}{e^{\sqrt{2}t_f} - e^{-\sqrt{2}t_f}} \\ & \cdot [(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}]\} \end{aligned}$$

二、波尔扎问题

假定系统的性能指标表示为

$$J = \Phi(\boldsymbol{x}_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\mathrm{d}t \tag{3.18}$$

且始端固定，其边界条件由(2.7)式给出：

$$x_i(t_0) = x_{i0} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.19}$$

终端可变，存在 r 个约束

$$\psi_j(x_f,t_f)=0 \qquad (j=1,2,\cdots,r;r\leqslant n) \tag{3.20}$$

为解除终端约束，引入 r 个不定乘子 ν_j，由式(3.20)，下式成立：

$$\sum_{j=1}^{r}\nu_j\psi_j(x_f,t_f)=0 \tag{3.21}$$

系统的状态方程假设为

$$\dot{x}_i=f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{3.22}$$

如前所述，为解除状态方程对 $u_k(t)$ 和 $x_i(t)$ 之间的约束，引入共态变量 $\lambda_i(t)$ 作为不定乘子，并且有

$$\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(f_i-\dot{x}_i)\mathrm{d}t=0 \tag{3.23}$$

将式(3.23)、式(3.21)和式(3.18)相加，并进行类似于前面固定终端问题所作的变换，可得

$$\begin{aligned}J=&\Phi(\boldsymbol{x}_f,t_f)+\sum_{j=1}^{r}\nu_j\psi_j(\boldsymbol{x}_f,t_f)\\&+\int_{t_0}^{t_f}\left[H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\dot{x}_i\right]\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.24}$$

上面考虑了

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t)=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{3.25}$$

J 取最优值的必要条件是式(3.24)的可变终端变分为零，即

$$\begin{aligned}\Delta J=&\Delta t_f\left[H+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\sum_{j=1}^{r}\nu_j\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\right]_f\\&+\left[\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{r}\nu_j\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}-\lambda_i\right)\right]_f\\&+\int_{t_0}^{t_f}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}+\dot{\lambda}_i\right)\delta x_i+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial H}{\partial u_k}\delta u_k\right]\mathrm{d}t=0\end{aligned} \tag{3.26}$$

上式注意到了

$$\Delta\int_{t_0}^{t_f}[H-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\dot{x}_i]\mathrm{d}t=\delta\int_{t_0}^{t_f}[H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\dot{x}_i]\mathrm{d}t+$$

$$[H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\dot{x}_i]_f\Delta t_f \tag{3.27}$$

以及

$$\lambda_i\delta\dot{x}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda_i\delta x_i)-\dot{\lambda}_i\delta x_i;\quad \delta x_i=\Delta x_i-\dot{x}_i\Delta t$$

由于引入了 ν_j，解除了终端中的 r 个约束；由于引入了 $\lambda_i(t)$，解除了 Δx_i 和 Δu_k 中的 n 个约束，于是由方程(3.26)式和(3.25)式可得：

(i)状态变量 x_i 和共态变量 λ_i 应满足的微分方程，即正则方程组：

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial x_i}\\ \dot{x}_i=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i}\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.28}$$

(ii)哈密顿函数对控制变量 u_k 取极值：

$$\frac{\partial H}{\partial u_k}=0\quad (k=1,2,\cdots,l) \tag{3.29}$$

(iii)$n+1$ 维增广状态空间的待定终端边界条件为

$$\psi_j(\boldsymbol{x}_f,t_f)=0\quad (j=1,2,\cdots,r;r\leqslant n) \tag{3.30}$$

$$\lambda_i(t_f)=\frac{\partial\Phi}{\partial x_{if}}+\sum_{j=1}^{r}\nu_j\frac{\partial\psi_j}{\partial x_{if}}\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.31}$$

$$H_f=-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t_f}+\sum_{j=1}^{r}\nu_j\frac{\partial\psi_j}{\partial t_f}\right] \tag{3.32}$$

(iv)固定始端的边界条件

$$x_i(t_0)=x_{i0}\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.33}$$

式(3.28)给出了 n 个 x_i 和 n 个 λ_i 的一阶微分方程组，可以解出它们的时间关系 $x_i^*(t)$ 和 $\lambda_i^*(t)$，其中总共包含的 $2n$ 个积分常

数可由始端边界条件和终端边界条件给出. 始端边界条件可确定 n 个积分常数，终端边界条件共 $n+r+1$ 个方程可确定 n 个终端的状态变量 x_{if}、r 个不定乘子 ν_j 和终端时间 t_f. 式(3.29)可以确定 l 个最优控制变量 $u_k^*(t)$. 不过，实际上，$x_i^*(t)$，$\lambda_i(t)$ 和 $u_k^*(t)$ 必须由式(3.28)和式(3.29)联合起来才能一起求出. 其过程和前面的固定终端情形相似. 本问题称为波尔扎(Bolza)问题.

有时为书写方便，将分量形式的方程(3.28)-(3.33)分别写成相应的向量形式：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\end{aligned}\right\} \tag{3.28a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = 0 \tag{3.29a}$$

$$\psi(\boldsymbol{x}_f, t_f) = 0 \tag{3.30a}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{x}_f} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_f}(\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{\psi}) \tag{3.31a}$$

$$H_f = -\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_f}(\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{\psi}) \tag{3.32a}$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{3.33a}$$

上述关于状态向量导数的方程是关于相应分量求导数的方程组的一种简化表示.

〔例 2〕设有一质量为 m 的质点，其上作用着一大小为 ma 的推力，假定是平面运动，并用一惯性坐标系统 x、y 来定位，质点的速度分量为 u、v，如图 3-1 所示. 现需以最短时间将质点送至距 x 轴

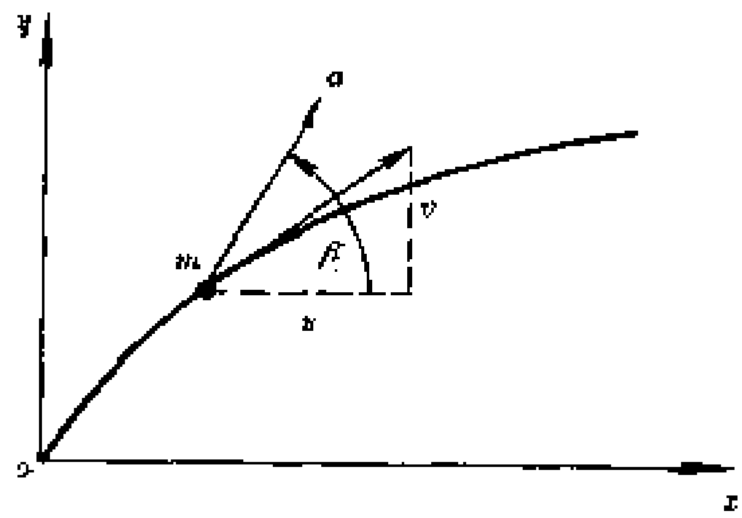


图 3-1

h 且与 x 轴平行的轨道．质点的终速为预定值 $u(T)=U$，求推力方向角 $\beta(t)$ 的变化规律．

〔解〕质点的运动方程是

$$\dot{u}=a\cos\beta \tag{A1}$$

$$\dot{v}=a\sin\beta \tag{A2}$$

$$\dot{x}=u \tag{A3}$$

$$\dot{y}=v \tag{A4}$$

H 函数是

$$H=1+\lambda_u a\cos\beta+\lambda_v a\sin\beta+\lambda_x u+\lambda_y v \tag{A5}$$

共态方程组是

$$\dot{\lambda}_u=-\lambda_x$$

$$\dot{\lambda}_v=-\lambda_y$$

$$\dot{\lambda}_x=0$$

$$\dot{\lambda}_y=0$$

即

$$\lambda_x=c_1 \tag{A6}$$

$$\lambda_y=c_2 \tag{A7}$$

$$\lambda_u=-c_1 t+d_1 \tag{A8}$$

$$\lambda_v=-c_2 t+d_2 \tag{A9}$$

最优控制规律由 $\dfrac{\partial H}{\partial\beta}=0$ 确定：

$$-\lambda_u a\sin\beta+\lambda_v a\cos\beta=0$$

即

$$\tan\beta=\frac{\lambda_v}{\lambda_u}=\frac{-c_2 t+d_2}{-c_1 t+d_1} \tag{A10}$$

边界条件是

$$u(0)=0 \tag{A11}$$

$$v(0)=0 \tag{A12}$$

$$x(0) = 0 \tag{A13}$$

$$y(0) = 0 \tag{A14}$$

$$u(T) = U \tag{A15}$$

$$v(T) = 0 \tag{A16}$$

$$x(T)\ \text{无约束} \tag{A17}$$

$$y(T) = h \tag{A18}$$

横截条件是

$$\lambda_u(T) = \nu_u \tag{A19}$$

$$\lambda_v(T) = \nu_v \tag{A20}$$

$$\lambda_x(T) = 0 \tag{A21}$$

$$\lambda_y(T) = \nu_y \tag{A22}$$

$$(\lambda_u a\cos\beta + \lambda_v a\sin\beta)_{t=T} = -1 \tag{A23}$$

分析上述方程，可以发现 9 个待求变量(包括 4 个状态变量，4 个共态变量和一个控制变量)可由 4 对正则方程和 1 个控制方程决定. 12 个待求参数(包括 4 对状(共)态变量的初值以及 ν_y, ν_u, ν_v 和 T 可由边界条件(A11)—(A16)及(A18)和横截条件(A19)—(A23)共计 12 个代数方程决定. 下面讨论求解过程.

对照方程(A6)和(A21)，可知 $\lambda_x = 0$，$c_1 = 0$，于是(A10)式化为

$$\tan\beta = \tan\beta_0 - ct \tag{A24}$$

式中 $\tan\beta_0 = d_2/d_1$，$c = c_2/d_1$.

设推力加速度 a 的大小恒定，则为了求解质点的运动方程，可依据式(A24)确立 $d\beta$ 和 dt 的关系：

$$dt = -\frac{1}{c}\sec^2\beta d\beta$$

于是方程(A1)—(A4)变为

$$du = -\frac{a}{c}\sec\beta d\beta;\quad dv = -\frac{a}{c}\sec^2\beta\sin\beta d\beta$$

$$dx = -\frac{1}{c}u\sec^2\beta d\beta; \quad dy = -\frac{1}{c}v\sec^2\beta d\beta$$

对上述 4 式求积分，结果为

$$u = \frac{a}{c}\log\frac{\tan\beta_0 + \sec\beta_0}{\tan\beta + \sec\beta} \tag{A25}$$

$$v = \frac{a}{c}(\sec\beta_0 - \sec\beta) \tag{A26}$$

$$x = \frac{a}{c^2}\left(\sec\beta_0 - \sec\beta - \tan\beta\log\frac{\tan\beta_0 + \sec\beta_0}{\tan\beta + \sec\beta}\right) \tag{A27}$$

$$y = \frac{a}{2c^2}\Big[(\tan\beta_0 - \tan\beta)\sec\beta_0 - (\sec\beta_0 - \sec\beta)\tan\beta - \log\frac{\tan\beta_0 + \sec\beta_0}{\tan\beta + \sec\beta}\Big] \tag{A28}$$

现在研究边界条件. 因 $v(T)=0$，故由(A26)式知 $\sec\beta_f = \sec\beta_0$，于是得

$$\beta_f = 2\pi - \beta_0 \tag{A29}$$

由(A24)式知 $cT=\tan\beta_0-\tan\beta_f=2\tan\beta_0$，于是

$$c = \frac{2\tan\beta_0}{T} \tag{A30}$$

由方程(A10)和(A24)有 $\tan\beta=\lambda_v/\lambda_u=\tan\beta_0-ct$，再应用关系式(A30)，得知当 $t=T$ 时有

$$\lambda_v(T) = -\lambda_u(T)\tan\beta_0 \tag{A31}$$

由于 $c_1=0$，以及方程(A8)、(A23)和(A31)，推得

$$\lambda_u = \lambda_u(T) = -\frac{\cos\beta_0}{a} \tag{A32}$$

联立解方程(A30)－(A32)并考虑式(A7)，得

$$\lambda_y = \lambda_y(T) = \frac{2\sin\beta_0}{aT} \tag{A33}$$

$$\lambda_v(T) = \frac{\sin\beta_0}{a} \tag{A34}$$

把(A32)式中的 λ_u 代入 $\tan\beta_0=d_2/d_1=d_2/\lambda_u$，得 $d_2=-\sin\beta_0/a$，于是

$$\lambda_v=-\frac{\sin\beta_0}{a}\left(1-2\frac{t}{T}\right) \tag{A35}$$

下面求推力方向角 β 和最短时间 T. 把关系式(A30)代入(A24)式，可得

$$\tan\beta=\left(1-\frac{2t}{T}\right)\tan\beta_0 \tag{A36}$$

因 $u(T)=U$，故由式(A25)和(A30)推知

$$\frac{aT}{U}=\frac{\tan\beta_0}{\frac{1}{2}\log\frac{\sec\beta_0+\tan\beta_0}{\sec\beta_0-\tan\beta_0}}=\frac{\tan\beta_0}{\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\beta_0\right)} \tag{A37}$$

利用 $y(T)=h$，则由式(A28)，(A30)和(A37)，可得

$$\frac{4ah}{U^2}=\frac{\tan\beta_0\sec\beta_0-\frac{1}{2}\log\frac{\sec\beta_0+\tan\beta_0}{\sec\beta_0-\tan\beta_0}}{\left[\frac{1}{2}\log\frac{\sec\beta_0+\tan\beta_0}{\sec\beta_0-\tan\beta_0}\right]^2} \tag{A38}$$

分析一下所得结果，可见依据预定的 $y(T)=h$，$u(T)=U$ 以及已知的推力加速度 a，由(A38)式可确定 β_0，接着可由(A37)式算出最短时间 T，最后再由(A36)式算出每一时刻的 β 值，于是推力方向角 $\beta(t)$ 的变化规律也就确立了.

在这一节的讨论中，我们假定控制变量 $u_k(t)$ 是不受限制的. 实际上，在许多工程问题，$u_k(t)$ 的取值是被限制在一定的范围之内的. 在这种情形下，有时就不一定能在这个范围内找到一组 $u_k(t)$ 使 $\Delta J=0$. 另一方面，有时可能存在不止一组 $u_k(t)$ 使 $\Delta J=0$，后面将讨论如何处理这类问题.

§4　最优状态调节器

经典控制理论只顾及到系统的伺服特性，对于控制系统的能

耗是不作考虑的. 现在的问题是能否应用动态最优控制理论建立起这样的系统：它既顾及较小能耗又有较好的伺服特性. 本节将讨论这样的调节器.

一、二次型性能指标

1. **性能指标表达式** 设系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) \end{cases} \tag{4.1}$$

式中 $\boldsymbol{u}(t)$ 是控制变量，表示外界作用于系统的变量. 改变 $\boldsymbol{u}(t)$ 将改变系统的状态轨迹. 在最优控制理论中，$\boldsymbol{u}(t)$ 不同于经典伺服理论中的预期值. 为区别起见，将系统的预期输出表示为 $\boldsymbol{z}(T)$. 于是输出的偏差量表示为

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{y}(t) \tag{4.2}$$

假定我们要研究的系统的性能指标具有如下形式：

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_f^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{e}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\cdot\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{4.3}$$

式中每一项都是二次型. $\boldsymbol{S}$ 为 $(n\times n)$ 实对称非负定常数矩阵. $\boldsymbol{Q}(t)$ 为 $(n\times n)$ 实对称非负定矩阵，$\boldsymbol{R}(t)$ 为 $(l\times l)$ 实对称正定矩阵. 形如式(4.3)的性能指标称为二次型性能指标. 这种性能指标是到目前为止研究得比较透彻的一种形式.

2. **性能指标的物理意义** 积分号下第一项代表偏差亏损函数. 在一维情形下特别当 $Q=1, S=0, R=0$ 时，式(4.3)归结为

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}e^2(t)\mathrm{d}t$$

这是§1讨论过的经典伺服系统的最小偏差性能指标. 可以看出矩阵 $\boldsymbol{Q}(t)$ 描述各种偏差分量的权重. 积分号下第二项是能量消耗的一种可能描述. 假定 $\boldsymbol{u}(t)$ 正比于电压或电流，由 $u^2(t)$ 正比

于消耗功率. 矩阵 $\boldsymbol{R}(t)$ 表示 $\boldsymbol{u}(t)$ 各分量对性能指标的权重. 式(4.3)的第一项为突出终端偏差的要求而引入的. 它相当于波尔扎问题的 $\Phi(\boldsymbol{x}_f,t_f)$,即

$$\Phi(\boldsymbol{x}_f,t_f) = \boldsymbol{e}_f^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_f \tag{4.4}$$

3. 几种特殊类型

(1)$\boldsymbol{z}(t)$是指定的向量函数. 如果能够求出适当的 $\boldsymbol{u}^*(t)$使式(4.3)的 J 为最小. 这样的问题为最优的自动跟踪问题. 如果 $\boldsymbol{u}(t)$ 代表功耗,则为最小功耗的自动跟踪问题.

(2)设 $\boldsymbol{z}(t)$与时间无关,即为常向量,则问题归结为最优输出自动调节问题. 为简单起见,设 $\boldsymbol{z}(t)=0$.

(3)如果 $\boldsymbol{z}(t)=0$ 且 $\boldsymbol{C}(t)=\boldsymbol{I}$,则 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t)=-\boldsymbol{e}(t)$. 这样的问题称为最优状态自动调节问题. 这类系统称为最优状态调节器. 相应的性能指标可以写成

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_f^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{4.3a}$$

式(4.4)变为

$$\Phi(\boldsymbol{x}_f,t_f) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_f^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_f \tag{4.4a}$$

以下着重讨论以式(4.3a)所描写的性能指标下的最优状态调节器问题.

二、最优状态调节器的一般理论

1. 基本方程 为简化讨论,假定终端时间是固定的,即 $t_f=$ 常量,并且

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{4.5}$$

系统的哈密顿为

$$H[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t] = \frac{1}{2}[\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}] + \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{4.6}$$

式中 x,λ,u,Q,R,A,B 都是 t 的函数，为简化书写都省略了. 系统的正则方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -[Qx + A^T\lambda] \tag{4.7}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax + Bu \tag{4.8}$$

控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T\lambda = 0 \tag{4.9}$$

因为 R 为正定矩阵，R^{-1}存在，所以有

$$u = -R^{-1}B^T\lambda \tag{4.10}$$

2. **黎卡提型方程** 将式(4.10)代入方程(4.8)有

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T\lambda \tag{4.11}$$

而式(4.7)则可写成

$$\dot{\lambda} = -A^T\lambda - Qx \tag{4.12}$$

原则上，由方程(4.11)和(4.12)可以直接解出 $x(t)$和 $\lambda(t)$. 但是无论是方程(4.11)还是(4.12)都表示共态向量 $\lambda(t)$和状态向量 $x(t)$之间存在某种线性关系. 假定这种关系表现为：$\lambda(t)$可以就 $x(t)$写出，比如

$$\lambda(t) = P(t)x(t) \tag{4.13}$$

那么只要将上式代入式(4.11)就可得到一个只含状态向量 $x(t)$及其导数 $\dot{x}(t)$的状态方程. 因此，如果式(4.13)存在，问题的求解就可简化.

进一步的工作是假定式(4.13)存在时，如何确定其系数矩阵 $P(t)$. 显然，$P(t)$是$(n\times n)$矩阵. 将式(4.13)代入(4.12)，并考虑(4.11)，可知 $P(t)$应满足如下方程：

$$\dot{P} = -PA - A^TP + PBR^{-1}B^TP - Q \tag{4.14}$$

这个方程属于黎卡提(Riccati)型方程.

方程(4.14)是一阶微分方程，需要确定一个积分常数矩阵. 根

据§3中波尔扎问题的横截条件，并注意式(4.4a)，有

$$\lambda_f = \frac{\partial\Phi}{\partial x_f} = Sx_f \tag{4.15}$$

于是有

$$P(t_f) = S \tag{4.16}$$

3. **黎卡提型方程的解** 黎卡提型方程(4.14)是一个非线性方程. 只有在非常简单的情形下才有解析解.

不难证明，解矩阵 $P(t)$ 是一个实对称矩阵. 注意到：$R^T = R$ 和 $Q^T = Q$，有

$$\dot{P}^T = -A^T P^T - P^T A + P^T B R^{-1} B^T P^T - Q \tag{4.17}$$

对比式(4.17)和式(4.14)，P 与 P^T 满足同样的方程. 并且由于 $S^T = S$，由式(4.16)可得 $P^T(t_f) = P(t_f)$. 因此有

$$P^T(t) = P(t) \tag{4.18}$$

由此可见，$P(t)$ 只含有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个独立元素，为确定矩阵 $P(t)$，只需求解相应的 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个标量方程.

在一般情况下，式(4.14)需由数字计算机求解. 由于终端已知，求解过程由终端时间 t_f 向前递推，方程(4.14)可以近似地化成差分方程

$$\frac{[P(t) - P(t-\Delta t)]}{\Delta t} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t)$$

或

$$P(t-\Delta t) = P(t) + \Delta t[P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t)] \tag{4.19}$$

这样就可以从 $t = t_f$ 开始把以前各个时刻的 $P(t)$ 全部递推出来. Δt 为计算时的时间增量. 一般地说 Δt 取得越小，计算结果越精确，但是计算工作量也越大.

4. **最优状态调节器的构成** 矩阵 $P(t)$ 一经解出，根据式(4.10)就可以求得最优控制与状态向量的关系式为

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)$$

或写成

$$u^*(t) = K(t)x(t) \tag{4.20}$$

式中

$$K(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t) \tag{4.21}$$

将式(4.20)代回到状态方程(4.8)有

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)K(t)x(t) \tag{4.22}$$

式中 $P(t)$ 满足方程(4.14). 这样构成的系统能够同时顾及到最小功耗(或者别的性能最优)和最小偏差. 通常将这样的系统称为**最优状态调节器**，或**状态反馈调节器**. 它的方块图，如图 4-1 所示.

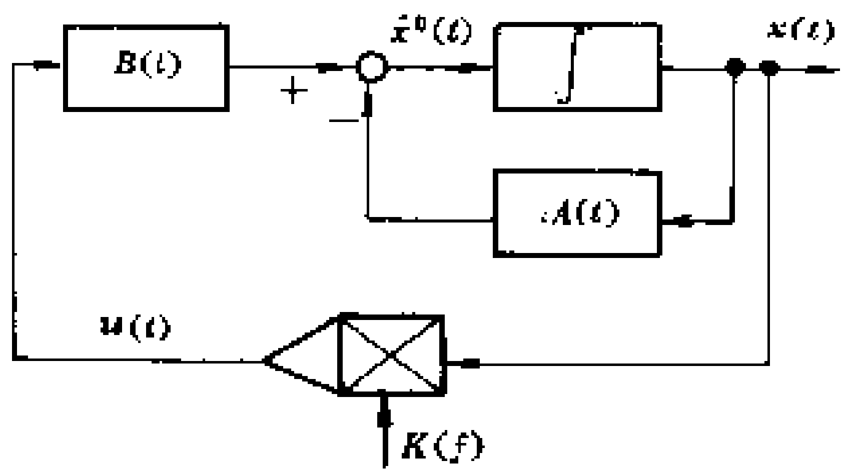


图 4-1

〔例〕设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{1}{2}x + u \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{A1}$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2}Sx_f^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(2x^2 + u^2)\mathrm{d}t \tag{A2}$$

试求：该系统的最优状态调节器的参数.

〔解〕根据题设，有

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 1, \quad Q = 2, \quad R = 1 \tag{A3}$$

于是黎卡提型方程可写成

$$\dot{P} = P + P^2 - 2 = \left(P + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \tag{A4}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\left(P + \frac{1}{2}\right)}{\left(P + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \mathrm{d}t$$

故

$$P = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\tanh\left(\frac{3}{2}t + \xi\right) \tag{A5}$$

这样，根据终端条件就可确定 ξ，从而确定 P. 例如：

(1) 设 $t_f = 1, S = 0$ 于是 $P(1) = 0$，代入(A5)得 $\xi \approx 1.8$. 这时线性状态调节器的参数为

$$P(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\tanh\left(\frac{3}{2}t + 1.8\right) \tag{A6}$$

$$K(t) = -R^{-1}B^TP = -P(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\tanh\left(\frac{3}{2}t + 1.8\right) \tag{A7}$$

由于假定 $S = 0$，最终时间不需特别重视. 系统最后趋于稳态，参数 K 趋于 -1.

(2) 设 $t_f = 10, S = 10$，则 $P(10) = S = 10$，于是 $\xi = 15.1$. 并且 $K(t_f) = -P(10) = -10$，以及

$$u^*(t) = -10x(t_f) \tag{A8}$$

$$P(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\tanh\left(\frac{3}{2}t + 15.1\right) \tag{A9}$$

可见，这时 $K = -10$.

以上说明调节器的参数是可调的. 当满足规定的要求时，系统

实现最优调节.

§5 动态规划和最小值原理

动态规划法是美国学者贝尔曼(Bellman)在五十年代提出来的,它与最小值原理一样,是处理控制变量限制在一定闭集内的最优控制问题的有效数学方法. 它把复杂的最优控制问题变为多级决策过程的递推函数关系. 这种多级决策过程称为**动态规划**. 下面先讨论动态规划的基本概念,而后讨论怎样利用动态规划法来解决最优控制问题.

一、最短路径的多级决策问题

动态规划是解决多级决策过程最优化的一种数学方法. 所谓多级决策过程,是指把一个过程分成若干个阶段,而每一个阶段都需作出决策,以便使整个过程取得最优的效果,最短路径问题就是动态规划多级决策过程的一个实例.

假设有如图5-1所示的路线,我们从A地到F地,要求选择一条路程最短的线路. 各地之间的距离已用数字标注在图中,由A到B级(B_1,B_2,B_3),需要选择一条路线,使得两地之间路程最短,这称为一级决策过程;又从B级(B_1,B_2,B_3)到C级(C_1,C_2,C_3)选择一条路线$B \to C$,使得$A \to B \to C$的路程为最短,这称为二级决策过程;从$C \to D$也要选择一条路线,$A \to B \to C \to D$使这段路线的路程为最短,这称为三级决策过程;依次类推,从$A \to F$是五级决策过程,现在要选择一条路线,使得A到F的路程为最短. 在B、C、D和E各点上,都有几种可能选择的方案,例如,从A到B,就是$A \to B_1$,$A \to B_2$,$A \to B_3$;从$B \to C$,有$B_1 \to C_1$,$B_1 \to C_2$,$B_2 \to C_1$,$B_2 \to C_2$,$B_2 \to C_3$,$B_3 \to C_2$,B_2,$B_3 \to C_3$,…….

动态规划的基本思想是,不管初始状态是什么,所作的第一级决策必须使所形成的状态和其后的所有决策一起组成一个最优的

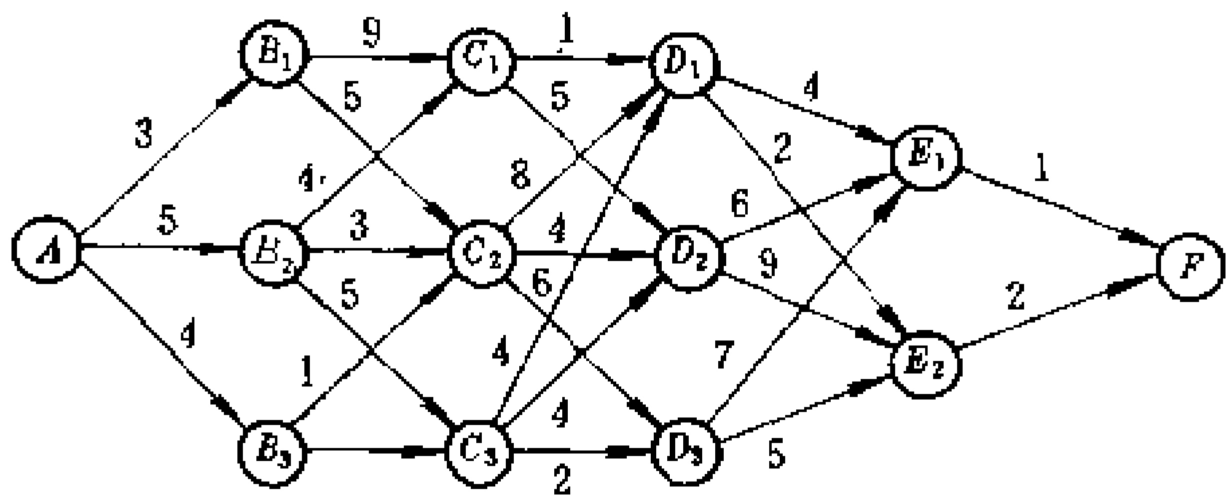


图 5-1 最短路线问题

策略.

假如具体决策过程从第一级开始,由于不了解其后的全部决策效果,很难断定所作的决策能否形成最优的策略. 如果反过来,从最后一级开始向前递推,就能有根据地决定所作的决策是否会形成最优的策略. 现以最短路问题为例作具体说明.

为了便于分析,我们引进几个符号,设 k 表示由某点到终点之间的级数,例如,从 C 到 F,$k=3$,是三级决策过程,所以 k 称为多级决策过程的级数,令 x 表示在任一级决策所处的位置,称为状态变量,令 $\xi_k(x)$表示第 k 级决策所形成的状态称为决策变量. 策略是指各个阶段的决策所组成的集合. 设 $W_k(x)$表示由状态 x 到终点 F 的 k 级过程的最短路程;令 $d(x,\xi_k)$表示 x 点到 ξ_k 的距离.

现在我们从最后一级开始计算. $W_1(E_1)$表示由 E_1 到 F 的最短距离. 由图 5-1 可知,$W_1(E_1)=1$. 同理,$W_1(E_2)=2$. 现在再计算最后二级,$k=2$,从 D_1 出发,可以有两种路线选择方案:一是经过 E_1,另一是经过 E_2,所以

$$W_2(D_1)=\min\begin{Bmatrix}\mathrm{d}(D_1,E_1)+W_1(E_1)\\ \mathrm{d}(D_1,E_2)+W_1(E_2)\end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix}4+1\\ 2+2\end{Bmatrix}=4$$

这说明，由 D_1 至终点 F 的最短路程为 4，其路线是 $D_1 \to E_2 \to F$，相应的决策变量为 $\xi_2(D_1)=E_2$. 同理

$$W_2(D_2)=\min\begin{Bmatrix} d(D_2,E_1)+W_1(E_1) \\ d(D_2,E_2)+W_2(E_2) \end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} 6+1 \\ 9+2 \end{Bmatrix}=7$$

这说明，由 D_2 到终点 F 的最短路程为 7，路线是 $D_2 \to E_1 \to F$，相应的决策变量 $\xi_2(D_2)=E_1$. 同理，$W_2(D_3)=7$，最短路线为 $D_3 \to E_2 \to F_2$，相应的决策变量为 $\zeta_2(D_3)=E_2$.

我们再看 $k=3$ 的情况. 起点可以是 C_1，C_2 或 C_3，对于 C_1 有

$$W_3(C_1)=\min\begin{Bmatrix} d(C_1,D_1)+W_2(D_1) \\ d(C_1,D_2)+W_2(D_2) \end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} 1+4 \\ 5+7 \end{Bmatrix}=5$$

相应的决策变量 $\xi_3(C_1)=D_1$. 上式表示由 C_1 出发，路线可有两种选择：一是经过 D_1；另一是经过 D_2. 如果选择 D_1，则以后显然选择由 D_1 到 F 的最短路线；如果选择 D_2，则以后必然选择由 D_2 到 F 的最短路线. 然后再在两条路线中选择一条最短的. 即 $C_1 \to D_1 \to E_2 \to F$. 同理，如果从 C_2 出发，这时有三种选择：

$$W_3(C_2)=\min\begin{Bmatrix} d(C_2,D_1)+W_2(D_1) \\ d(C_2,D_2)+W_2(D_2) \\ d(C_2,D_3)+W_2(D_3) \end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} 8+4 \\ 4+7 \\ 6+7 \end{Bmatrix}=11$$

所以，由 C_2 到 F 的最短路线是从 $C_2 \to D_2 \to E_1 \to F$，最短路程为 11，相应的决策变量 $\xi_3(C_2)=D_2$. 同理，$W_3(C_3)=8$，相应的决策变量 $\zeta_3(c_2)=D_1$.

对于 $k=4$ 的情况，同样可得

$$W_4(B_1)=14$$

$$W_4(B_2)=9$$

$$W_4(B_3)=12$$

相应的决策变量为

$$\xi_4(B_1)=C_1$$

$$\xi_4(B_2)=C_1$$

$$\xi_4(B_3)=C_2$$

最后，对于 $k=5$，出发点只有 A

$$W_5(A)=\min\begin{Bmatrix} d(A,B_1)+W_4(B_1) \\ d(A,B_2)+W_4(B_2) \\ d(A,B_3)+W_4(B_3) \end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} 3+14 \\ 5+9 \\ 4+12 \end{Bmatrix}=14$$

相应的决策变量 $\xi_5(A)=B_2$，所以，最短路线为

$$A\to B_2\to C_1\to D_1\to E_2\to F$$

它的路程为 14.

分析以上的数字例子可知，一个 k 级最优决策过程（例如从 $A\to F$ 的 $W_5(A)$），不管第一级决策如何（例如 $\xi_5(A)=B_1,B_2,B_3$），其余 $k-1$ 级决策过程（例如从 $B\to F$），至少必须依据第一级决策所形成的状态（例如 B_1,B_2,B_3）组成一个 $k-1$ 级最优决策过程（例如 $W_4(B_1),W_4(B_2),W_4(B_3)$）. 在此基础上，再选择第一级决策（例如选择 $\xi_5(A)=B_2$，使总的 N 级决策过程为最优（例如获得最小的 $W_5(A)$）.

上述各级决策过程所应用的递推关系为：

$$\begin{cases} W_k(x)=\min\limits_{\xi_k(x)}\{d[x,\xi_k(x)]+W_{k-1}[\xi_k(x)]\} \\ W_1(x)=d(x,F) \end{cases} \tag{5.1}$$

式(5.1)在动态规划中称为**函数方程**，当选择第一个决策 $\xi_k(x)$ 时，它有两种影响：其一是直接影响第一级的距离 $d[x,\xi_k(x)]$；其二是影响后面$(k-1)$级决策的初始状态，因而也影响到后面的$(k-1)$级的最短路程．最优策略的选择应统一考虑这两者的总效果．

因此，动态规划方法是把一复杂的多级决策过程归结为一个从后向前递推的单级决策过程．它要求每一个单级决策使得所得到的后一级状态和其后的所有决策形成最优的策略．

二、贝尔曼方程

现在根据前面讨论的动态规划基本思想来研究 $n+1$ 维增广状态空间的最优路径问题．假定最优化的性能指标是

$$J=\int_{t_0}^{t_f}F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\mathrm{d}t \tag{5.2}$$

式中 t_0 是始端时间，t_f 是终端时间．相应的始端状态变量和终端状态变量分别给定为 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}_f$，于是写成分量形式的边界条件分别为

$$x_i(t_0)=x_{i0} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.3}$$

$$x_i(t_f)=x_{if} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.4}$$

在仍然假定状态方程给定为

$$\dot{x}_i=f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.5}$$

的情形下，讨论通过改变 l 维控制变量$(u_1,u_2,\cdots,u_l)$(即输入向量 $\boldsymbol{u}$)使状态轨迹为最优轨迹．沿着这样的轨迹积分式(5.2)，性能指标 J 取得最小值 J^*．不过在这里假定 $\boldsymbol{u}(t)$的各个分量的取值被限制在一定范围之内，即

$$\boldsymbol{u}(t)\in\Omega \tag{5.6}$$

因此问题归结为在式(5.5)和(5.6)的约束条件下求实现

$$J^*=\min\int_{t_0}^{t_f}F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\mathrm{d}t \tag{5.7}$$

的最优路径和控制变量：

$$x = x^*(t); \qquad u = u^*(t) \tag{5.8}$$

现在考虑按照式(5.1)所表达的递推关系来讨论 $n+1$ 维增广状态空间的最优路径问题. 两者的对应关系如下：

式(5.1)中的 W,对应于本问题的最优性能指标 J^*；

式(5.1)中的 x,对应于增广状态空间的坐标$(\boldsymbol{x},t)$；

式(5.1)中的决策所形成的状态 $\xi_k(x)$,对应于邻近时刻 $t+\Delta t$ 时在最优轨迹上增广状态空间的一个点$(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},t+\Delta t)$.

决策的动因,在本问题中就是改变 $\boldsymbol{u}(t)$使状态轨迹为最优.

式(5.1)中的 $\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\xi_k(\boldsymbol{x}))$对应于

$$\Delta J^* = \int_t^{t+\Delta t} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\mathrm{d}t \tag{5.9}$$

同时还应说明,$\boldsymbol{W}_k(\boldsymbol{x})$是指在第 $\boldsymbol{k}$ 级决策时 $\boldsymbol{x}$ 到 F 的最短路程. 注意到 $\boldsymbol{W}$ 被定义为最短路程,并且对应于每个 $\boldsymbol{x}$,最短路径都是确定的,因此,每一个 $\boldsymbol{x}$ 对应有一个确定的 $\boldsymbol{W}$ 值,$\boldsymbol{W}$ 也就成了 $\boldsymbol{x}$ 的函数,同样对于 J,由于是最优性能指标,我们也假定它是沿增广状态空间的最优路径的积分. 如果终端给定,它就是始端坐标的函数.

于是按照动态规划的基本思想,有下面的函数关系

$$J^*(\boldsymbol{x},t) = \min_{u\in\Omega}\left\{\int_t^{t+\Delta t} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\mathrm{d}t + J^*(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},t+\Delta t)\right\} \tag{5.10}$$

和式(5.1)相对应,式(5.10)右边大括号内第一项近似为

$$\int_t^{t+\Delta t} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\mathrm{d}t \approx F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\Delta t \tag{5.11}$$

将式(5.10)右边第二项按泰勒级数展开,得

$$\begin{aligned} J^*(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},t+\Delta t) = J^*(\boldsymbol{x},t) &+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial J^*}{\partial x_i}\Delta x_i \\ &+ \frac{\partial J^*}{\partial t}\Delta t + \varepsilon(\Delta t)^2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

由于$(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},t+\Delta t)$相当于$(\boldsymbol{x},t)$的下一级的决策变量，其取值，根据状态方程(5.5)，将按$\boldsymbol{u}(t)$的变化而定. 因此

$$\Delta x_i = \dot{x}_i \Delta t = f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\Delta t \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{5.13}$$

考虑上式后，将式(5.11)和式(5.12)代入式(5.10)可得

$$J^*(\boldsymbol{x},t) = \min_{u\in\Omega}\left\{\left[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial J^*}{\partial x_i}f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\right]\Delta t + \frac{\partial J^*}{\partial t}\Delta t + J^*(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon(\Delta t)^2\right\} \tag{5.14}$$

上式右边大括号中的J^*和$\dfrac{\partial J^*}{\partial t}\Delta t$与$\boldsymbol{u}(t)$的选取无关，可提出取最小值的符号之外. 于是当$\Delta t\to 0$时，式(5.14)的极限变为

$$-\frac{\partial J^*(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \min_{u\in\Omega}\left\{F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial J^*}{\partial x_i}f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\right\} \tag{5.15}$$

这就是著名的**贝尔曼方程**.

将式(5.15)右边和式(3.8)所表示的哈密顿函数

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t) = F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{5.16}$$

作一比较，就可发现，式(5.15)右边大括号内的表达式可用哈密顿函数来写成，只要作如下代换：

$$\lambda_i = \frac{\partial J^*}{\partial x_i} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{5.17}$$

这时式(5.15)可以写成

$$-\frac{\partial J^*(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \min_{u\in\Omega} H\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial J^*}{\partial x},\boldsymbol{u},t\right) \tag{5.18}$$

由此可见，只要能写出哈密顿函数，就可写出贝尔曼方程.

方程(5.18)含有两层意思：

(1)通过对方程右边求最小值：

$$H\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial J}{\partial x},\boldsymbol{u},t\right)\bigg|_{u\in\Omega} = \min \tag{5.19}$$

可以确定 u^*.

(2)一旦 u^* 被确定,并代入哈密顿函数的表达式,就有

$$H\left(x,\frac{\partial J}{\partial x},u^*,t\right)=\min_{u\in\Omega}H\left(x,\frac{\partial J}{\partial x},u,t\right) \tag{5.20}$$

于是贝尔曼方程变为

$$-\frac{\partial J(x,t)}{\partial t}=H\left(x,\frac{\partial J}{\partial x},u^*,t\right) \tag{5.21}$$

或

$$-\frac{\partial J(x,t)}{\partial t}=F(x,u^*,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial J}{\partial x_i}f_i(x,u^*,t) \tag{5.22}$$

三、 最小值原理

假定 $J(x,t)$ 是贝尔曼方程(5.22)的解,于是可以反过来由代换关系式(5.17)定义一组新的变量:

$$\lambda_i=\frac{\partial J}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.23}$$

式(5.20)可以表示为

$$H(x,\lambda,u^*,t)=\min_{u\in\Omega}H(x,\lambda,u,t) \tag{5.24}$$

现在来证明由式(5.23)所定义的变量 λ 满足正则方程的共态方程. 将式(5.23)两边对 t 求导数,有

$$\dot{\lambda}_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial J^*(x,t)}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.25}$$

上式右边关于时间 t 的全导数是在增广状态空间中沿着状态轨迹进行的. 于是

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial J^*(x,t)}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 J^*(x,t)}{\partial x_j\partial x_i}\dot{x}_j+\frac{\partial^2 J^*(x,t)}{\partial t\partial x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.26}$$

由于 $J(x,t)$ 是贝尔曼方程(5.22)的解,将式(5.22)两边对 x_i 求偏导数,并假定 $u(t)$ 已经取最优值 $u^*(t)$,于是

$$-\frac{\partial^2 J^*(\boldsymbol{x},t)}{\partial t \partial x_i}=\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,t)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial J^*}{\partial x_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 J^*}{\partial x_j \partial x_i}f_j \tag{5.27}$$

将式(5.27)代入式(5.26)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial J^*}{\partial x_i}=-\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,t)}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial J^*}{\partial x_j}\frac{\partial f_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,t)}{\partial x_i}$$

注意到式(5.23)，上式右边除去负号，就是哈密顿正则方程意义下的 H 对 x_i 的偏导数，考虑式(5.25)，有

$$\dot{\lambda}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.28}$$

以上我们证明了，由式(5.23)所定义的 $\boldsymbol{\lambda}$ 和正则方程意义下的共态变量是一致的.

同样，状态方程不难写成

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.29}$$

我们指出，式(5.28)和(5.29)中的哈密顿函数 H 所含的控制变量应当是最优的 $\boldsymbol{u}$，如式(5.24)所规定的. 如果将式(5.28)，(5.29)和(5.24)联合起来，就得到了 $\boldsymbol{u}\in\Omega$ 的限制条件下使性能指标(5.2)式取小值的必要条件：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\lambda}_i&=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\\ \dot{x}_i&=\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}\end{aligned}\right\}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.30}$$

和

$$H=\min_{\boldsymbol{u}\in\Omega}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},t) \tag{5.31}$$

这样，再加上 $n+1$ 维增广状态空间的边界条件一起就可以有效地解决 $\boldsymbol{u}(t)\in\Omega$ 时的动态最优控制问题.

事实上，方程(5.30)和(5.31)是庞德里亚金首先通过变分原理求出来的. 这一组方程和 § 3 所讨论的不受限制的动态最优控

制相比较，主要区别在于式(5.31)和式(3.29)之间. 式(5.31)是 H 关于 $\boldsymbol{u}$ 在某个闭集 Ω 中取最小值的表达式，而式(3.29)是 H 关于 $\boldsymbol{u}$ 取极值(严格地应为取极小值)的表达式. 当 $\boldsymbol{u}$ 只能在某个有限的集合 Ω 中取值时，不一定存在使 H 取极值的点. 有时虽然存在极点. 但 H 在这一点所取得的极小值不一定是整个集合 Ω 中的最小值. 在这两种情形下，$\boldsymbol{u}$ 只能取 Ω 的某个边界值，才能使相应的 H 值满足式(5.31). 在一维情形下可以直观地表示为图 5-2(a)，5-2(b). 只当极点存在，并且相应的 H 值(极小值)又是 Ω 内的最小值，本问题的 $\boldsymbol{u}$ 才位于极点位置，如图 5-2(c). 式(5.31)和(5.30)所表示的在某个闭集中实现最优控制的条件，称为**庞德里亚金最小值原理***.

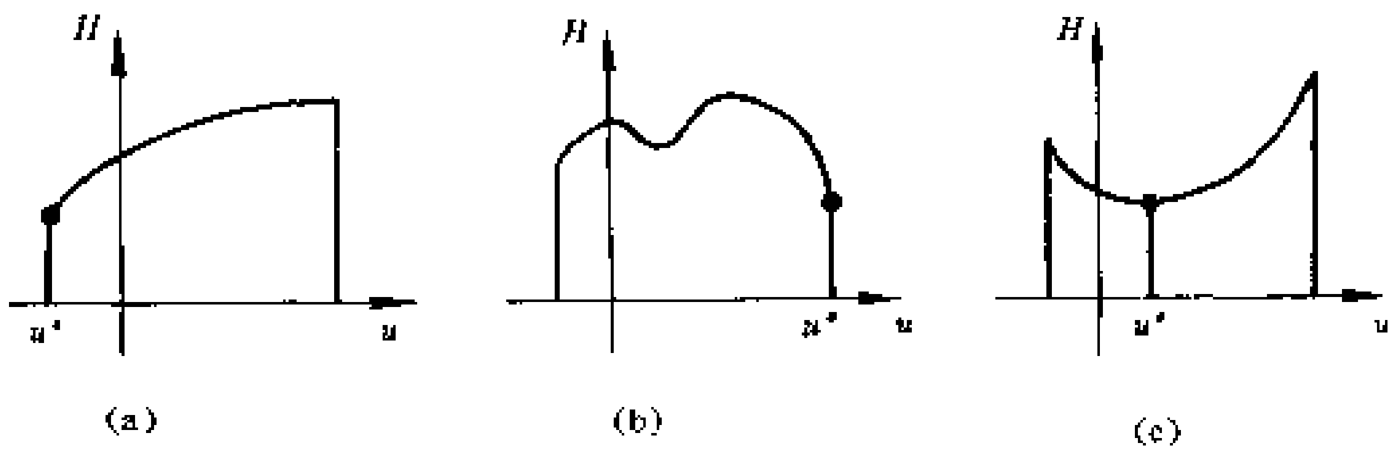


图 5-2 最优控制变量的确定

对于波尔扎问题，性能指标为

$$J = \Phi(\boldsymbol{x}_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \mathrm{d}t \tag{5.32}$$

应满足的边界条件和横截条件为

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.33}$$

$$\psi_j(\boldsymbol{x}_f, t_f) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, r) \tag{5.34}$$

* 比较严格的证明可参考秦寿康，张正方：《最优控制》，电子工业出版社，北京，1984(p43).

$$\lambda_{if} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{if}} + \sum_{j=1}^{r} \nu_j \frac{\partial \psi}{\partial x_{if}} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{5.35}$$

$$H_f = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \sum_{j=1}^{r} \nu_j \frac{\partial \psi}{\partial t_f}\right] \tag{5.36}$$

可以看出式(5.33)—(5.36)和式(3.30)—(3.33)一致.

〔例 1〕最速下降问题.

设有一升降机 W（如图 5-3 所示。为简单起见，其质量假定为 1），在垂直上升或下降的过程中，一方面受重力 g 作用，另一方面受控制器的作用力 $u(t)$ 作用，并假定 $|u(t)|\leqslant K$. 在开始时刻升降机离地面高度为 x_1^0，垂直运动的速度为 x_2^0，试求控制器的某一作用方式 $u(t)$，使升降机能最快下降到地面，并使到达地面时的速度为零.

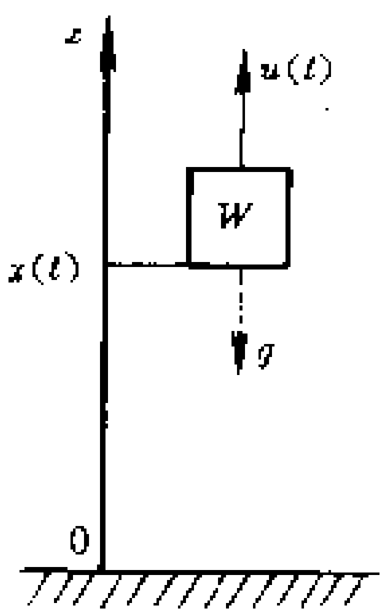


图 5-3

〔解〕若以 x 表示升降机的高度，取作用力 $u(t)$ 向上为正. 这时升降机的动力学方程为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = u(t) - g$$

初始条件为 $x(0)=x_1^0, \dot{x}(0)=x_2^0$；终端条件为 $x(t_f)=0, \dot{x}(t_f)=0$. 显然，终端时刻 t_f 在本问题中是待定的.

为了将运动方程化为状态方程的形式，令 $x_1=x, x_2=\dot{x}$. 于是可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_1^0 \\ \dot{x}_2 = u(t) - g, & x_2(0) = x_2^0 \end{cases} \tag{A1}$$

终端条件为

$$x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0 \tag{A2}$$

性能指标根据要求应取

$$J = \int_0^{t_f} \mathrm{d}t = t_f \tag{A3}$$

对应的哈密顿函数即为

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (u - g) \tag{A4}$$

由(A4)可知，H 是 u 的线性函数，为了使 $H(u)$ 达到最小，必须要求 $\lambda_2 u = -K|\lambda_2|$，或者

$$u^*(t) = -K \cdot \mathrm{sgn}[\lambda_2(t)] \tag{A5}$$

这里，符号函数定义为

$$\mathrm{sgn}[\lambda_2(t)] = \begin{cases} +1 & \text{当 } \lambda_2(t) > 0 \\ -1 & \text{当 } \lambda_2(t) < 0 \\ \text{不定} & \text{当 } \lambda_2(t) = 0 \end{cases} \tag{A6}$$

这时，哈密顿函数的最小值为

$$H^* = 1 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 g - K|\lambda_2| \tag{A7}$$

将 H 代入正则方程组中，由共态方程有

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{cases} \tag{A8}$$

求解方程(A8)，得到

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = c_1 \\ \lambda_2(t) = -c_1 t + c_2 \end{cases} \tag{A9}$$

由此可见，λ_2 作为 t 的线性函数，最多改变一次符号. 因此 $u(t)$ 的符号也最多改变一次：由 $-K$ 变为 $+K$，或由 $+K$ 变为 $-K$，或者始终保持 $+K$ 或 $-K$ 不变. 于是，问题的焦点最后集中到 $u^*(t)$ 的符号应该怎样确定上来.

在 $\lambda_2 = -c_2 t + c_2 > 0$ 的时间区间上，$u^*(t) = -K$. 这时状态方程变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(K + g) \end{cases}$$

此方程的解为

$$x_2 = -(K+g)t + D_1$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}(K+g)t^2 + D_1 t + D_2$$

经消去 t 后，状态轨线族为

$$x_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x_2^2}{K+g} + D \tag{A10}$$

在相平面(二维状态空间)上，它是一族抛物线(如图 5-4 实线所示，其箭头为状态变量的运动方向). 在这族抛物线中，只有一支抛物线

$$l_-: x_1 = -\frac{x_2^2}{2(K+g)} \qquad x_2 \geq 0$$

能到达平衡位置 0. 也就是说，当 $u^* = -K$ 时，只有在 l_- 上的点，才能抵达 $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$.

同理，在 $\lambda_2 = -c_1 t + c_2 < 0$ 的时间区间上，$u^*(t) = K$. 这时状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = K - g \end{cases}$$

从它的解能得出另外一族抛物线(如图 5-4 虚线所示)：

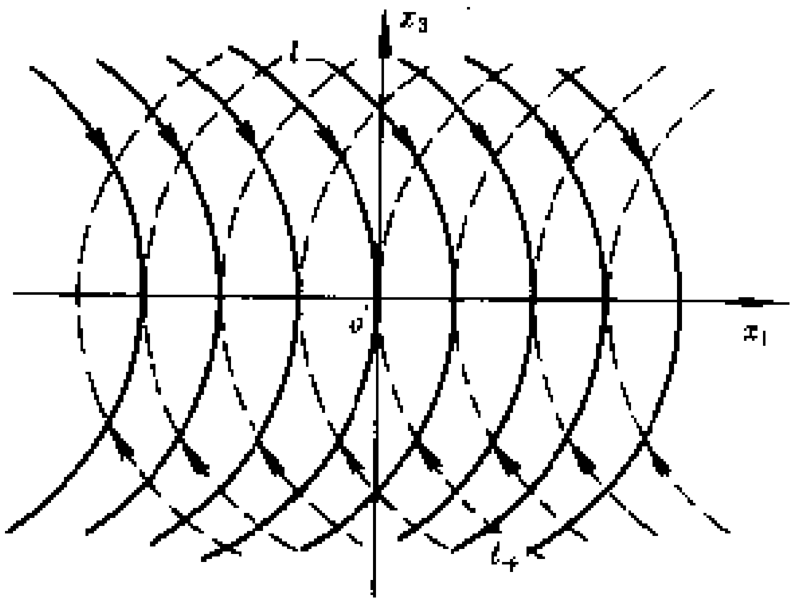


图 5-4

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{K-g} + D \tag{A11}$$

其中能抵达平衡状态的一支抛物线是

$$l_+: x_1 = \frac{x_2^2}{2(K-g)} \qquad x_2 \leq 0$$

将曲线 l_- 和 l_+ 合并成一条曲线，记为 l，即

$$
l: x_1 = \begin{cases} \dfrac{x_2^2}{2(K-g)}, & \text{当 } x_2 \leq 0 \text{ 时} \\ -\dfrac{x_2^2}{2(K+g)}, & \text{当 } x_2 \geq 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{A12}
$$

曲线 l 将相平面分成两部分，在曲线 l 的上半平面记为 L_-（包括曲线 l_-），在曲线 l 的下半平面记为 L_+（包括曲线 l_+）. 由于最优控制 $u^*(t)$ 只取 K 或 $-K$，综合上面讨论可知：

(1) 当初始状态 $x_0=(x_1^0, x_2^0)$ 恰好落在 l_-（或 l_-）上时，最优控制取值为 $u^*(t)=K$（或 $-K$），它所对应的状态将沿着 l_+（或 l_-）运到达平衡位置 0.

(2) 当初始状态 $\boldsymbol{x}_0 \in L_-$，而 $x_0 \in l$ 时，最优控制开始阶段取 $u^*(t)=-K$，与之对应的状态沿着图 5-5 中的实抛物线运动，直至到达曲线 l_+ 时，最优控制马上切换成 $u^*(t)=K$，然后，状态沿 l_+ 到达平衡位置 0.

(3) 当初始状态 $\boldsymbol{x}_0 \in L_+$，但 $x_0 \in l_+$ 时，最优控制最初取 $u^*(t)=K$，相应的状态沿着图 5-5 中的虚抛物线运动，直到与曲线 l_- 相交时，最优控制立即切换成 $u^*(t)=-k$，然后，状态沿 l_- 到达平衡位置 0.

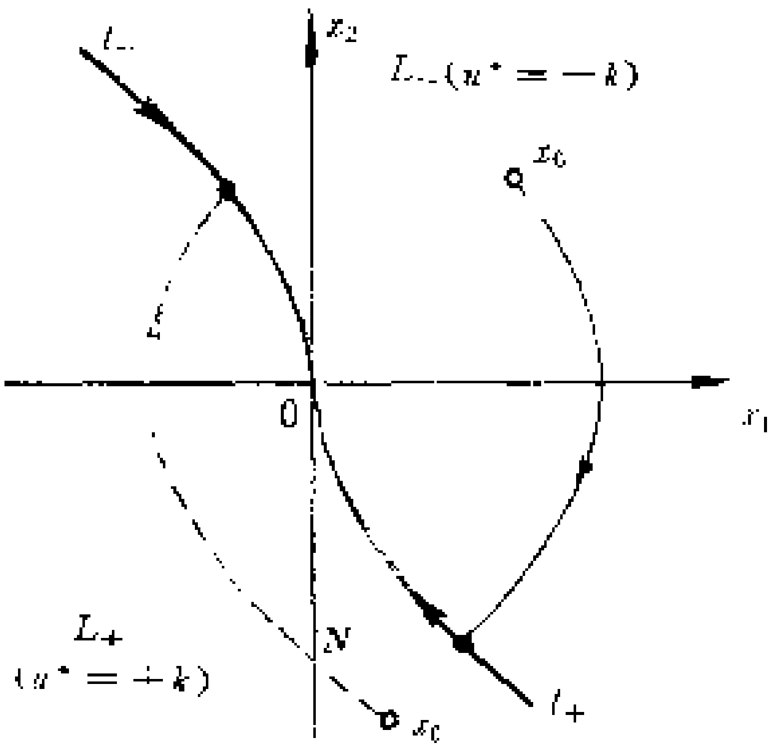


图 5-5

(4) 当到达平衡位置时，应取 $u^*(t)\equiv 0$，使状态继续保持在平衡位置上.

对于情形(1)，最优控制取值不必切换；对于(2)，(3)两种情形，最优控制在状态到达曲线 l 时切换一次. 因此，曲线 l 称为**切换曲线**（或称**开关曲线**）. 这种形

式的最优控制（称开关控制）也可看作状态的反馈：

$$u^*(t)=\begin{cases}K, & 当\ x\in L_+\ 时\\ -K, & 当\ x\in L_-\ 时\end{cases} \tag{A13}$$

上面的结论，纯粹出于数学上的考虑.事实上，实际受控对象必须在地面之上，即须保持 $x_1\geqslant 0$（在相平面上的状态位置处于右半平面）.如果在上面所列的第(3)种情形，状态沿虚抛物线运动，必将与 $x_1=0$ 轴相交于 N 点（$N\neq 0$）.这就意味着升降机已到达地面，但速度不为零.也就是说，当 $x_0\in L_+$ 时，由于向下的初速度太大，这时即使以最大推力向上作用，也不可能使升降机到达地面时速度为零.在这种情况下，对象实际上是不可控制的.

对于第(2)种情况，$x_0\in L_-$，$u^*(t)=-K$，表示开始时以最大推力向下作用，使之尽快下降；当检测到状态 $x(t)$ 满足 l_+ 的方程时，则马上改变控制，使它以最大推力向上作用，即取 $u^*(t)=K$，直至以速度为零到达地面.当到达地面时，应立即将 $u^*(t)$ 切换为 0，否则升降机将在上述正向推力作用下立即离地上升.

从上面例子可以看出，快速最优控制具有如下特点：

(i)最优控制要么取最大允许值，要么取最小允许值；

(ii)最优控制的取值经有限次切换，其状态可达到平衡位置；

(iii)最优控制的切换，发生在相空间中的某一开关面（线）上.

一般来说，这些特点对于线性系统的最小时间控制都是具备的.解决这类问题的关键，在于开关面（线）的获得，利用开关面（线）将状态空间分割成若干部分，并确定在每一部分上最优控制的取值.只要完成了这些准备工作，实现最优控制的技术手段将是十分简单的.

如果想要知道上例中的最优控制时间 t_f，只须按下述步骤进行计算：

(i)根据初始状态所处的位置，决定 $u^*(t)$ 的取值；

(ii)将 $u=u^*(t)$ 代入正则方程，并解出状态轨迹；

(iii)计算上述轨线与开关线的交点，并从中算出切换之前所经历的时间；

(iv)算出从切换点沿开关曲线运动到平衡位置所花的时间；

(v)把上面两段时间加起来，就是总的最优转移时间.

习　　题

1. 设性能指标为

$$J=\int_1^2(\dot{x}+\dot{x}^2t^2)\mathrm{d}t$$

边界条件为 $x(1)=1$，$x(2)=2$，求 J 为极值时的最优轨迹 $x^*(t)$.

2. 求性能指标为

$$J=\int_0^1(\dot{x}^2+1)\mathrm{d}t$$

在边界条件 $x(0)=0$，$x(1)$ 为自由情况下的极值曲线.

3. 设在铅直平面中有 O、A 两点，它们不在同一垂线上，如图 6-1. 现有一质点自 O 向 A 运动，假定介质的阻力可以忽略不计，问应沿怎样的轨线运动，才能使所需时间最短？

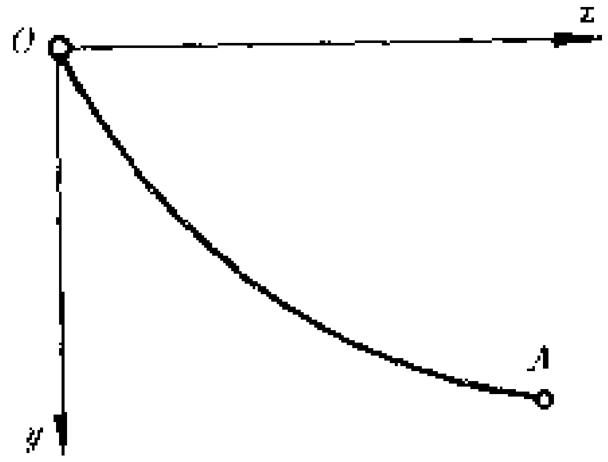


图 6-1　最速降线问题

4. 已知系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

边界条件为

$$\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}x_1(2)\\ x_2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

试求性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)\mathrm{d}t$$

的极值.

5. 若在§3〔例2〕中计及重力加速度 g 的影响,即在垂直速度 v 中加上一项 $-gt$、在高度 y 中加上一项 $-\frac{1}{2}gt^2$,并假定重力加速度 g 为常数,推力加速度 a 的大小恒定,试求下面三个量:始端推力方向角 β_0,终端推力方向角 β_f,以及下落过程的最短时间 T.

6. 设一阶系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

且

$$x(t_0) = x_0$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2}cx_f^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\mathrm{d}t$$

式中常数 $c>0$,且 t_0 和 t_f 给定,求最优控制 $u^*(t)$.

7. 使系统 $\dot{x}(t)=u(t)$; $x(0)=1$; $x(t_f)=0$ 的

$$J = t_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\mathrm{d}t$$

取极小值,求 $u^*(t)$和 t_f.

8. 设有一阶系统

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

其初始状态为 $x(1)=3$. 求最优控制 $u^*(t)$,使

$$J = x^2(5) + \int_1^5 u^2(t)\mathrm{d}t$$

最小.

9. 设有二阶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

求 $u^*(x_1,x_2)$，使

$$J=\frac{1}{2}[x_1^2(3)+2x_2^2(3)]$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^3[2x_1^2(t)+4x_2^2(t)+2x_1(t)x_2(t)+\frac{1}{2}u^2(t)]\mathrm{d}t$$

最小. 并写出相应的 Riccati 方程.

10. 设有一阶系统

$$\dot{x}=u-x$$

其状态初值和终值分别为 $x(0)=1$，$x(1)$为自由，且$|u(t)|\leqslant 1$，求最优控制 $u^*(t)$，使性能指标

$$J=\int_0^1(x-\frac{u}{2})\mathrm{d}t$$

为最小.

11. 设在最速下降问题(§5 例 1)中，$k=2$，$g=1$，以及 $x_{10}=1$，$x_{20}=1$，求：(1)$u^*(t)$；(2)在(x_1,x_2)平面中的最优轨迹.

12. 给定二阶系统：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+u\\ \dot{x}_2=x_1\end{cases}$$

$|u(t)|\leq 1$ 且

$$\begin{cases}x_1(0)=1\\ x_2(0)=0\end{cases}$$

终端自由，求使 $J=x_2(1)$最小的 $u(t)$.

13. 火箭飞向月球的最小燃料控制问题

假设一个向月球发射的宇宙火箭已进入月球的引力范围以内，且作自由竖直下落飞行. 我们希望火箭下落到离月球高度为 h(几百米)地方时，下落速度为零. 此后再利用月球引力和其他控制作用，使火箭在适当地点着陆. 现在的问题是如何控制火箭. 使火箭到达高度为 h 的地方时，速度为零而消耗的燃料最少.

对火箭的控制作用是靠燃烧时喷出大量气体的反冲力来实现的. 设火箭的质量是 $m(t)$，由于燃料消耗，它是个变量，气体的喷出速度(相对于火箭)设为常量 K，燃料消耗变化率为 $\dot{m}$，它所受的约束条件为 $0 \geqslant \dot{m} \geqslant -M$. 由力学可知，给予火箭的推力为 $K\dot{m}$. 设 x 为火箭离月球表面的高度坐标，竖直速度为 $\dot{x}$，加速度为 $\ddot{x}$. 火箭的运动方程为

$$\ddot{x} = -(K\dot{m}/m) - g \tag{B1}$$

其中 g 为月球的重力加速度常数.

若令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1; x_3 = m(t)$ 作状态变量，$u = \dot{m}$ 作为控制变量，则可由式(B1)得状态方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K}{x_3}u - g \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \tag{B2}$$

燃料消耗的指标为

$$J = \int_0^{t_f} |\dot{m}| \mathrm{d}t = m(0) - m(t_f) \tag{B3}$$

试将最小燃料消耗指标化为最小时间指标，求火箭燃料的最优控制.

第四章　非线性系统

非线性环节在工程上广泛地存在着。非线性控制系统在工程控制的早期发展阶段就受到注意。由于数学上的困难，科学上非线性问题的定量研究直到电子数字计算机广泛应用之后才得以普遍展开。非线性控制理论的研究，首先借鉴于物理学，特别是力学上的非线性理论成果而展开的。

§1　非线性物理过程的一般特征

关于时间和空间满足线性微分方程的物理量有两个最基本的特点：(1)满足迭加原理；(2)在时间空间上是唯一决定的。但是满足非线性微分方程的物理量不具有这些特点。

为了使读者对非线性系统有初步的认识，我们在这一节罗列非线性振动系统的一些特殊现象。这些现象在非线性系统中有一定的普遍性。有些将会在后面得到进一步的讨论。

一、具有非线性恢复力的振动系统

大家熟悉，一个线性的阻尼受迫振动可以表示为

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = P\cos\omega t \tag{1.1}$$

式中$(-kx)$是系统的弹性恢复力。熟悉弹性力学的读者都知道，这只是在形变极其微小时才成立。在一般情况下它是非线性的。一个研究得较多的非线性恢复力含有x^3项。相应的振动方程表示为

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx + k'x^3 = P\cos\omega t \tag{1.2}$$

这个方程通常称为杜芬(duffing)方程。

满足杜芬方程的系统具有下面一些特征：

1. **自由振动频率与振幅有关** 假定式(1.2)中外界的驱动力不存在，即式(1.2)变为

$$m\ddot{x}+f\dot{x}+kx+k'x^3=0 \tag{1.3}$$

参数 m，f 和 k 均是正的常数，而 k' 可为正，也可为负。如果 k' 是正的，弹簧就称为硬弹簧；如果 k' 是负的，则称为软弹簧。系统非线性的程度是用 k' 的值来表示的。如果系统受到一个非零的初始条件的作用，则方程(1.3)的解代表一个阻尼振荡。在实验研究中观察到：当振幅减小时，自由振荡的频率或是减小，或是增加，这分别取决于 $k'>0$ 或 $k'<0$。当 $k'=0$ 时，随着自由振荡的振幅减小，频率保持不变。这相当于线性系统的情况。这些特性如图 1-1 所示，图上表示了自由振荡的波形。图 1-2 描绘了 k' 大于零，等于零，小于零三种情况下频率和振幅的关系。

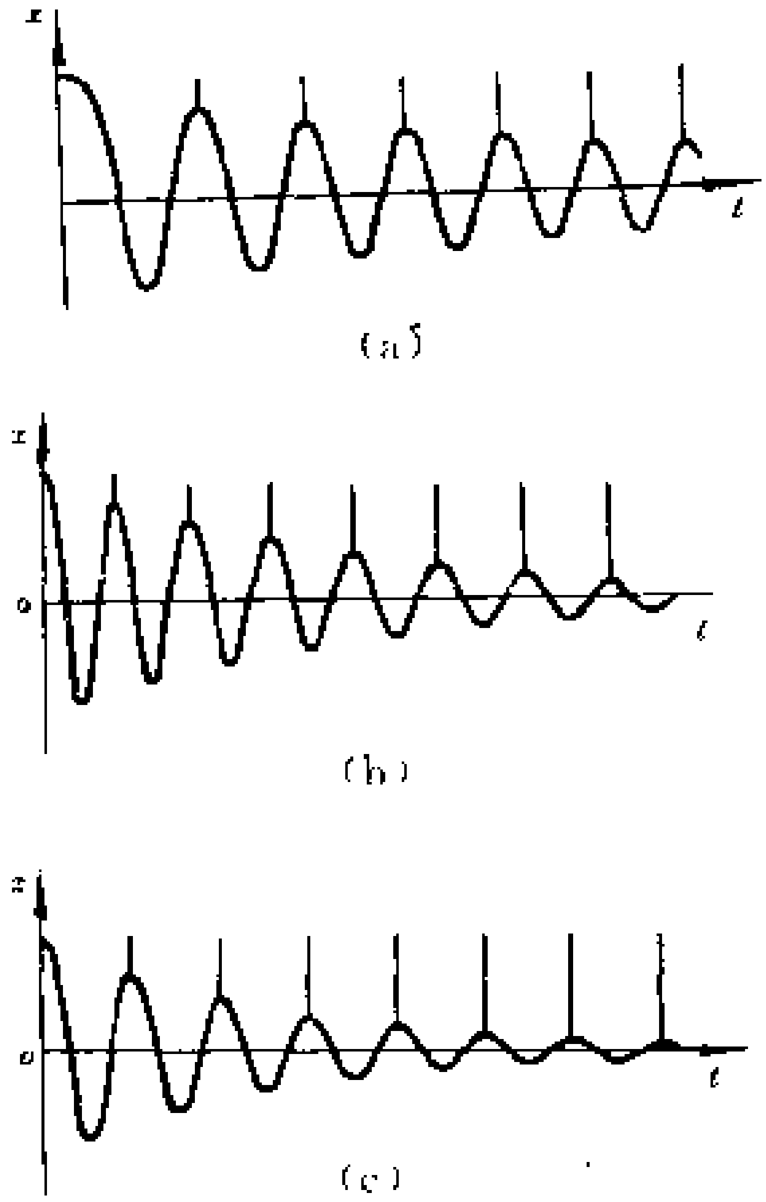


图 1-1 方程(1.3)所表示的系统的自由振动波形

在非线性系统的实验研究中，频率和振幅的依赖性能够很容易地观察到。频率和振幅的依赖性是非线性系统振动最基本的特性之一。图 1-2 形式的曲线使我们能看出系统是否包含了非线性，并且还可以看出非线性的程度。

2. **多值响应和跳跃谐振** 如果系统存在周期性外作用，即满足方程(1.2)，我们可以观察许多实验现象，如多值响应，跳跃谐振

以及各种周期运动。如果系统是线性的，这些现象就不会出现。

进行实验观察时，使外作用函数的振幅 P 保持常数，缓慢地改变其频率，并观察响应的振幅 A，我们就可得到与图 1-3 和图 1-4 类似的频率响应曲线。假定 $k'>0$，并且从图 1-3 曲线上外作用频率 ω 低的点 1 开始。当频率 ω 增加时，振幅 A 也增加，直到点 2 为止。若频率继续增加，将引起从点 2 到点 3 的跳跃，并伴有振幅和相位的改变。此现象称为**跳跃谐振**。当频率 ω 再进一步增加时，振幅 A 沿着曲线从点 3 到点 4。换一个方向来进行实验，即从高频开始，这时我们观察到，当 ω 减小时，振幅通过点 3 逐渐增加，直到点 5 为止。当 ω 继续减小，将引起从点 5 到点 6 的另一个跳跃，也伴有振幅和相位的改变。在这个跳跃之后，振幅 A 随着频率 ω 一起减小，并且沿着曲线从点 6 趋向点 1。因此，响应曲线实际上是不连续的，并且对于频率增加和减小的两种情况，响应曲线上的表示点则沿着不同的路线移动。与点 2 和点 5 之间曲线对应的振荡是不稳定的振荡，这部分在实验中是观察不到的。

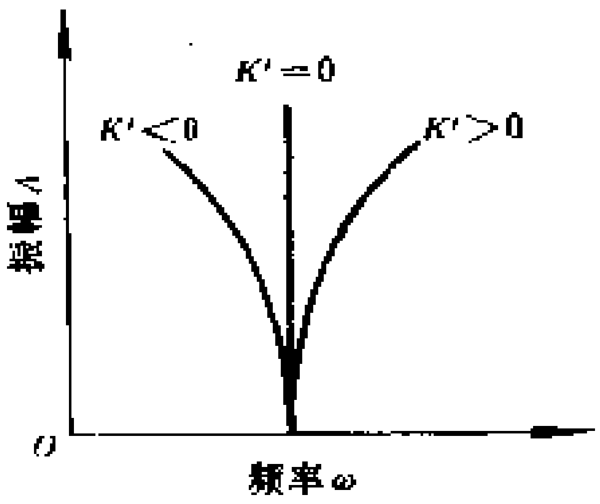


图 1-2 杜芬方程所表示的系统振动频率和振幅的关系

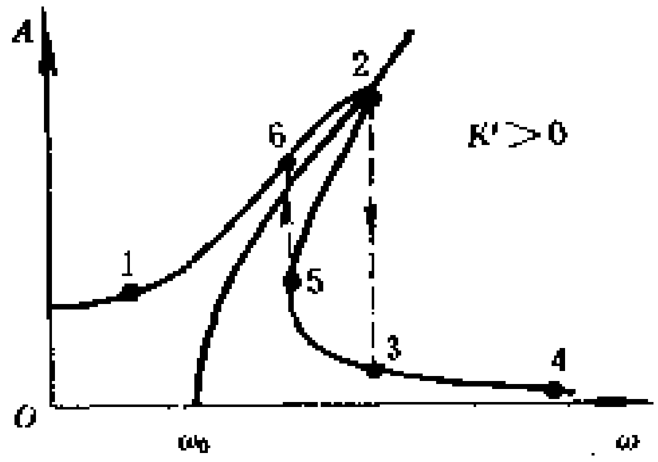


图 1-3 硬弹簧系统跳跃谐振曲线

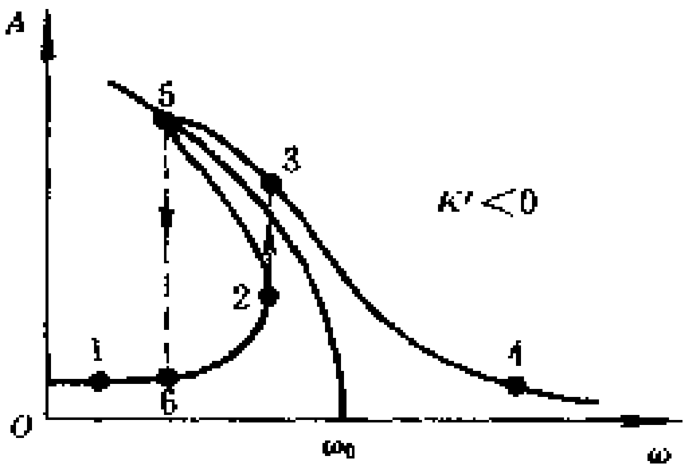


图 1-4 软弹簧系统跳跃谐振曲线

在具有软弹簧($k'<0$)的系统中也发生类似的跳跃，如图 1-4 所示。因此，我们看出，对于外作用函数的一个给定的振幅 P，便有一个频率范围，在这个频率范围内能出现两个稳定振荡中的任一个。注意，为了产生跳跃谐振，阻尼项必须很小，同时外作用函数的振幅也必须要大到足以使系统进入到显著的非线性工作范围。

从图形上看，图 1-3 和图 1-4 都是线性振动系统谐振曲线的一种扭曲。

3. **分谐波振荡**　**“分谐波振荡”**这个术语，我们是指这样的一种非线性稳态振荡，这时外作用的频率是这种振荡的频率的整数倍。图 1-5 所示的是分谐波振荡时输入和输出波形的一个例子。分谐波振荡的发生取决于系统的参数和初始条件，以及外作用函数的振幅和频率。“取决于初始条件”这句话，意味着分谐波振荡不是自发的。为了产生这种振荡，必须有某种冲击，比如说，突然改变外作用函数的振幅或频率。一旦分谐波被激发，在某个频率范围内它们可能是非常稳定的。如果外作用函数的频率改变到一个新的值，分谐波振荡不是消失，就是频率也改变到 ω/n，这里 ω 是外作用频率，而 n 是分谐波振荡的阶数。(注意，在线性系统中也可能发生频率为外作用频率的一半的振荡。)线性保守系统亦可能出现看来象非线性系统的分谐波振荡那样的振荡。两者的本质区别在于非线性分谐波振荡除了外作用的频率以外，还取决于外作用的振幅和初始条件。

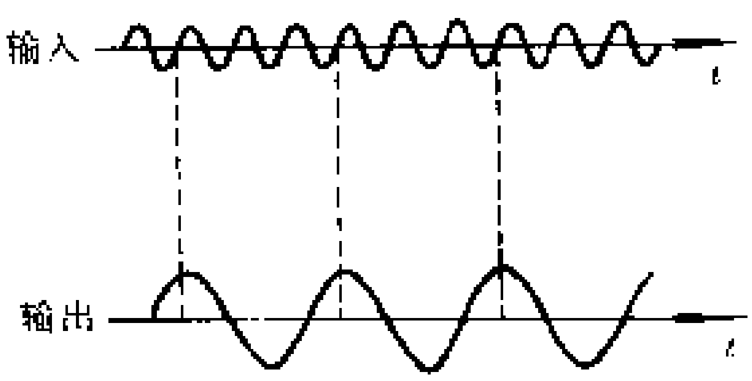


图 1-5　分谐波振荡曲线

二、具有非线性阻尼的振动系统

1. **自激振荡(极限环)**　在研究电子学线路所构成的振荡回路过程中，范德波(Van der Pol)于 1926 年发现了一个重要的非

线性现象，即所谓自激振荡。振荡回路的电信号满足如下方程

$$\ddot{x} - f(1 - x^2)\dot{x} + kx = 0 \tag{1.4}$$

式中 $f,k>0$。这个方程通常称为范德波方程。它具有非线性阻尼项。

由方程(1.4)可以看出，当 x 之值很小时，阻尼是负的，这时把能量输入系统中；而当 x 之值很大时，阻尼是正的，这时从系统中取出能量。因此，我们能够料想到这种系统可能呈现持续振荡。这种振荡便称为**自激振荡**或**极限环**。(注意，假若系统仅有一个极限环，象本系统的情况一样，那么此极限环的振幅就不取决于初始条件。)

自激振荡第一次阐明了一个系统怎样依靠内部的恒定能量源而维持振荡的。这是一种"活"的系统。顺便指出，范德波曾用非线性振荡器来模拟心脏，并且利用四个振荡器可以产生出和心电图很象的波形。

2. **频率捕捉现象** 在某些非线性系统中可以观察到一个有趣的现象，这就是频率捕捉的现象。对一个能出现频率为 ω_0 的极限环系统，如果加入一个频率为 ω 的周期性外作用，我们就能观察到众所周知的差拍现象。当两个频率之间的差别减小时，拍频也减小。在线性系统中，无论从实验和理论方面都能发现当 ω 趋近于 ω_0 时，拍频将无限地减小。然而，在自激的非线性系统内，从实验中发现，在某个频带内极限环的频率 ω_0 和外作用频率 ω 取得同步，或者说，因外作用频率 ω 而被捕捉。此现象通常称为频率捕捉，发生捕捉现象的频带称为捕捉区。

图 1-6 表示 $|\omega-\omega_0|$ 和 ω 之间的关系。对于线性系统，$|\omega_0-\omega|$ 和 ω 之间的关系遵照虚线部分变化，并且只有当 ω 为某一个值，即 $\omega=\omega_0$ 时，$|\omega_0-\omega|$ 才为零。对于自激非线性系统，则发生频率捕捉现象，在频率捕捉区域内(在图 1-6 中它由 $\Delta\omega$ 表示)，频率 ω 和 ω_0 吻合，这时只存在一个频率 ω。这种频率捕捉现象在呈现极限环

的非线性系统的频率响应中能观察到。

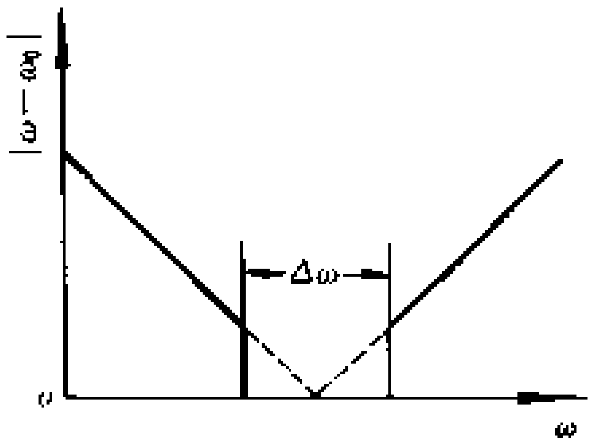


图 1-6 表示频率捕捉区的 $|\omega-\omega_0|$ 对 ω 的曲线

三、分叉和浑沌

多值性是非线性系统的重要特点之一。前面提到的跳跃谐振和分谐波现象都属于频率域的多值性。分叉和浑沌是多值性的典型表现。

1. **分叉** 首先以机械上摆为例说明平衡位置的多值性。图 1-7 是一个用机构实现的上摆。在重力和弹性力的作用下，其运动微分方程可以写成

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin\theta - ka\theta \tag{1.5}$$

由于仅当 $\theta \ll 1$ 时才能取 $\sin\theta \approx \theta$，于是式(1.5)也只在摆幅很小时才可近似为线性振动方程：

$$ml^2\ddot{\theta} = (mgl - ka)\theta \tag{1.6}$$

如果摆幅不是很小，则 $\sin\theta$ 的近似需要取更高次项：$\sin\theta \approx \theta - \frac{1}{6}\theta^3$。于是式(1.5)变为

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl(\theta - \frac{1}{6}\theta^3) - ka\theta \tag{1.7}$$

可以看出，上式是一个没有阻尼项的杜芬方程。

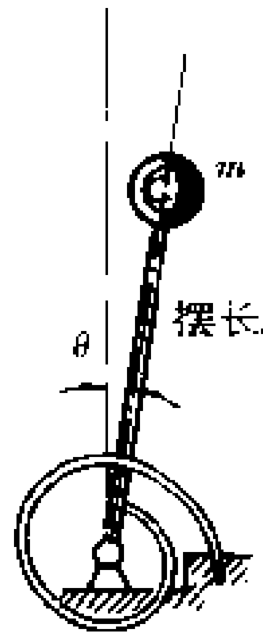


图 1-7 机械上摆

现在讨论系统的平衡位置。

对于线性方程(1.6)，$\theta=0$ 是系统的唯一且稳定的平衡位置。对于杜芬方程(1.7)，方程右边，作用于系统的外作用(外力矩)

$$f = mgl\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right) - ka\theta \tag{1.8}$$

是关于 θ 的三次多项式。系统的平衡位置，也就是使式(1.8)中 $f=0$ 的 θ 值，可能有三个：$\theta=0$ 和

$$\theta = \pm\sqrt{6 - \frac{6ka}{mgl}} \tag{1.9}$$

为确定这些平衡位置是否稳定，对式(1.8)求导数，得

$$f' = mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - ka \tag{1.10}$$

如果 θ 之值使 $f'<0$，则表明外作用 f 为"恢复力"型，该平衡位置稳定；如果 $f'>0$，则所对应的平衡位置为不稳定的。

然而某个平衡位置是否存在，以及是否稳定都与系统的参数有关。例如 $\theta=0$，一方面由式(1.8)可知有 $f=0$，这总是系统的平衡位置，但是否稳定需根据式(1.10)来判断：

当 $mgl<ka$，则 $f'<0$，平衡稳定；

当 $mgl>ka$，则 $f'>0$，平衡不稳定。

对于 $mgl>ka$，$\theta=0$ 为不稳定平衡位置情形下，由式(1.9)所表示的 θ 值为实数(有意义)，并且为稳定平衡位置。因为

$$f' = -2(mgl - ka) < 0 \tag{1.11}$$

综上所述，如果弹簧的弹性足够好，使 $mgl<ka$ 成立，系统只有一个平衡位置，即 $\theta=0$，且稳定。如果摆球质量不断加大，使得重力作用超过弹性力，即 $mgl>ka$，$\theta=0$ 变为不稳定平衡位置。与此同时，在 $\theta=0$ 两侧分别出现了一个平衡位置。由式(1.9)可以看出，m 越大偏离 $\theta=0$ 处越远，如图 1-8 所示。图中 ξ 为平衡位置的 θ 值。满足 $mgl=ka$ 的 m 值为临界值，记作 m_c。自此，平衡位置发生分叉。这种平衡位置的分叉现象是在线性系统中观察不到的。

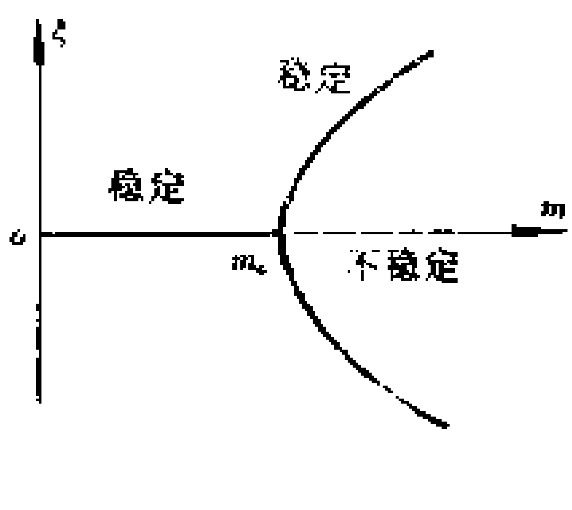


图 1-8　平衡位置的分叉

2. **浑沌**　如果图 1-8 所表示的分叉现象在每个分支以及随后的分支连续出现，最后分支之间就会重迭在一起，如图 1-9。分支之间一旦发生重迭，

决定论就失去意义。在图 1-9 中，λ 代表系统参数，ξ 代表状态。当 λ 足够大时，分支之间发生重迭，ξ 取值具有明显的不确定性，即随机性。这种现象称为**浑沌**。

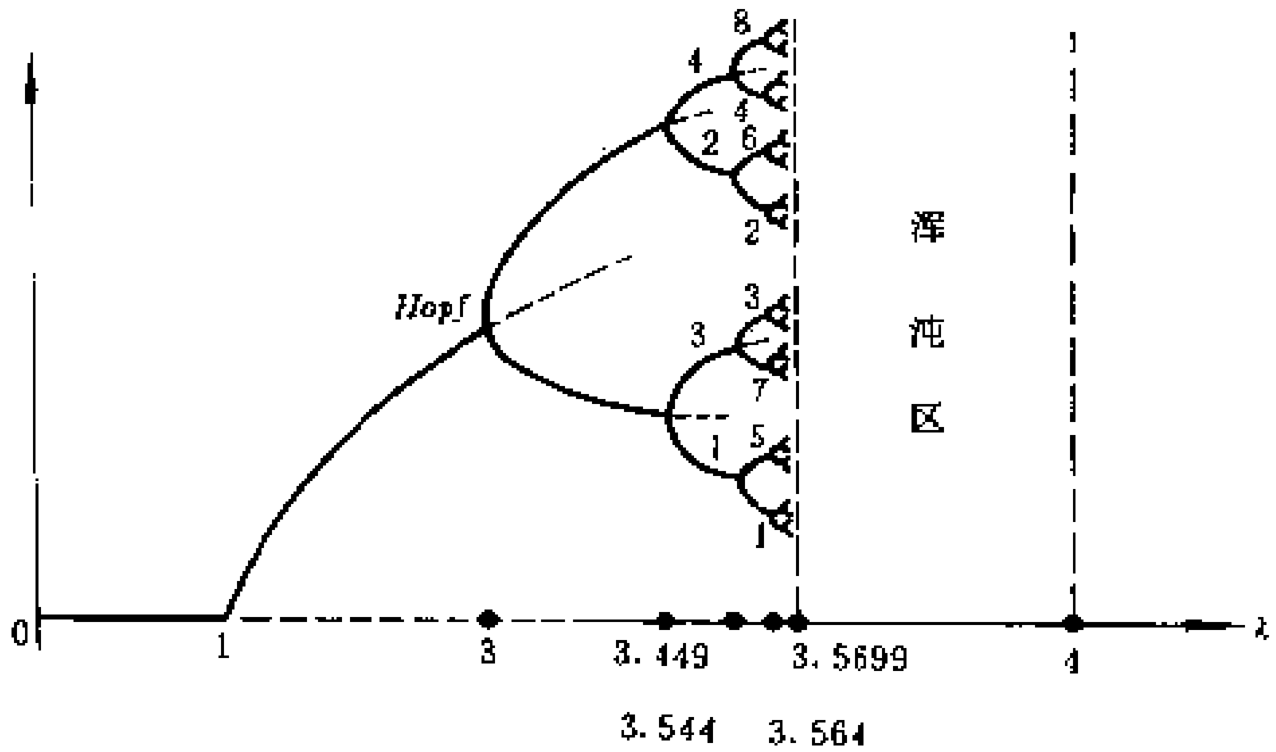


图 1-9 从分叉到浑沌

下面举例说明发生浑沌的情况。非线性迭代方程

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \tag{1.12}$$

可以看成一维非线性状态方程

$$\dot{x} = (\lambda - 1)x - \lambda x^2 \tag{1.13}$$

的差分形式。λ 是系统的可变参数。

表面上看，只是参数 λ 以及状态的初值 x_0 给定，系统以后的状态应当可以从方程(1.12)或(1.13)求得确定解。但事实并不这样简单。

假定 λ=4，研究 x 的初值 x_0=0.1，0.100,000,01 和 0.100,000,02 三种情形。用计算机根据方程(1.12)进行计算，各次迭代结果列于表 1-1。在表 1-1 中计算机用十位数的精度进行计算，初值之间的差异出现在第 8 位上(相当于有效数字 7 位)。我们期望初始状态的这种微小差异对随后的 x_n 取值的影响可以忽略，或者

尽管可能仍然存在差异，但这种差异至少应当具有某种有序性。这种期望对于线性方程是可以实现的，但是对于方程(1.12)，表 1-1 表明只当 $n\leqslant10$ 时是正确的。当 $n\geqslant50$，初始的微小偏差使得 x_n 的取值完全没有规律了，或者说是随机的。为了说明这不是由于计算机位数低而产生的效应，有人用 30 位有效数字进行过计算，结果在 100 次迭代之后，x 的计算值便完全是随机的。

表 1-1

n	由 $x_{n-1}=4x_n(1-x_n)$确定的 x_n		
0	$x_0=0.1$	$x_0=0.100,000,01$	$x_0=0.100,000,02$
1	0.36	0.360,000,003,2	0.360,000,006,4
2	0.921,6	0.921,600,035,8	0.921,600,017,7
3	0.289,013,76	0.289,013,639,1	0.289,013,518,2
…	…	…	…
10	0.147,836,559,9	0.147,824,444,9	0.147,812,330,4
…	…	…	…
50	0.277,569,081,0	0.435,057,399,7	0.055,005,377,6
51	0.802,094,386,2	0.983,129,834,6	0.207,919,144,2
52	0.634,955,927,4	0.066,342,251,5	0.658,755,094,6
…	…	…	…

对于一个实际系统，初值的测定总有一定的误差。而这种误差导致了非线性系统较长时间之后的不确定性。这种短期确定、长期不确定，并且明显依赖于初值的随机现象称为动力学系统的内在随机性。也就是前面所称的浑沌。牛顿力学通常被人认为是决定论的象征。但只要作用力是非线性的，则在一定条件下就会表现出内在的随机性。

四、控制系统中的非线性问题

在控制系统中，尤其是工程控制系统，常常不可避免地包含一

些非线性环节。例如饱和、死区、滞环、间隙、非线性摩擦、非线性弹簧以及可压缩流体等等。以前曾经指出，用线性度很好的传感器构成的反馈回路可以在很大程度上消除系统在前面回路中的非线性效应。定量地研究含非线性环节的反馈系统的控制行为是本章的主要目的之一。

不过，我们不准备深入探讨非线性系统的多值性问题，而着重讨论非线性系统的研究方法。众所周知，当非线性现象不占主导地位时，可以用线性系统去近似。这里主要涉及两种方法：(1)当系统采用频率特性来研究时，非线性环节可进行付立叶展开而取其一阶项来描述，这种方法称为描述函数法。(2)在研究系统的时域特性时，许多场合常常可以用分段线性的状态方程来表示。法国著名数学家庞凯莱(Poincare)在这方面做了大量工作。他所提出的相平面法从十九世纪末一直沿用至今。

非线性系统的稳定性问题主要介绍李雅普诺夫(Lyapumov)理论。

在处理非线性问题时，电子数字计算机是目前广泛应用的手段。模拟计算机在被人们"遗忘"了大约二、三十年之后，近来又受到了注意。它在粗略地分析非线性问题表现出独特的简捷性。而正在开发的神经网络计算机可望成为强有力的计算工具。

§2 非线性环节的描述函数

这一节介绍如何描述非线性环节的输出和输入的数学关系以及如何在频域里处理包含这类环节的控制系统等问题。

一、描述函数的概念

引入描述函数可将线性系统的传递函数和频率特性法推广到非线性系统。

设给定的非线性环节的输入量是正弦函数

$$x(t) = X\sin\omega t \tag{2.1}$$

则输出量 $y(t)$ 虽然不能像线性系统那样也能严格地表示为 ωt 的正弦函数，但是总可以展开为付立叶级数：

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t + B_n\sin n\omega t) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}Y_n\sin(n\omega t + \varphi_n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

式中

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\cos n\omega t\mathrm{d}(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin n\omega t\mathrm{d}(\omega t)$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$$

如果非线性是反对称的，那么 $A_0 = 0$。这时输出的一阶谐波分量是

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t \\ &= Y_1\sin(\omega t + \varphi_1) \end{aligned} \tag{2.3}$$

仿照线性系统的频率特性，定义

$$N(X,\omega) = \frac{Y_1}{X}e^{j\varphi_1} \tag{2.4}$$

或

$$N(X,\omega) = \frac{Y_1}{X}\angle\varphi_1 \tag{2.5}$$

为非线性环节的描述函数。

描述函数的定义在形式上和频率特性相似。但线性系统的频率特性只和输入量的频率有关，与振幅无关。非线性环节的描述函数，一般地说，既与输入量的频率也与输入量的振幅 X 有关。并且描述函数只当近似条件(2.3)式成立时才有意义。

确定了非线性环节的描述函数之后，整个控制系统就可以用线性系统的数学方法来处理。比如讨论系统的稳定性时，乃奎斯特判据便可应用。

二、各种非线性环节的描述函数

1. 继电器型非线性 继电器型非线性通常称为双位非线性。设有一继电器型元件，其输入一输出特性曲线如图 2-1(a)所示，该元件的输出或是一个正常数，或是一个负常数，图 2-1(b)所示的是输入和输出的波形。

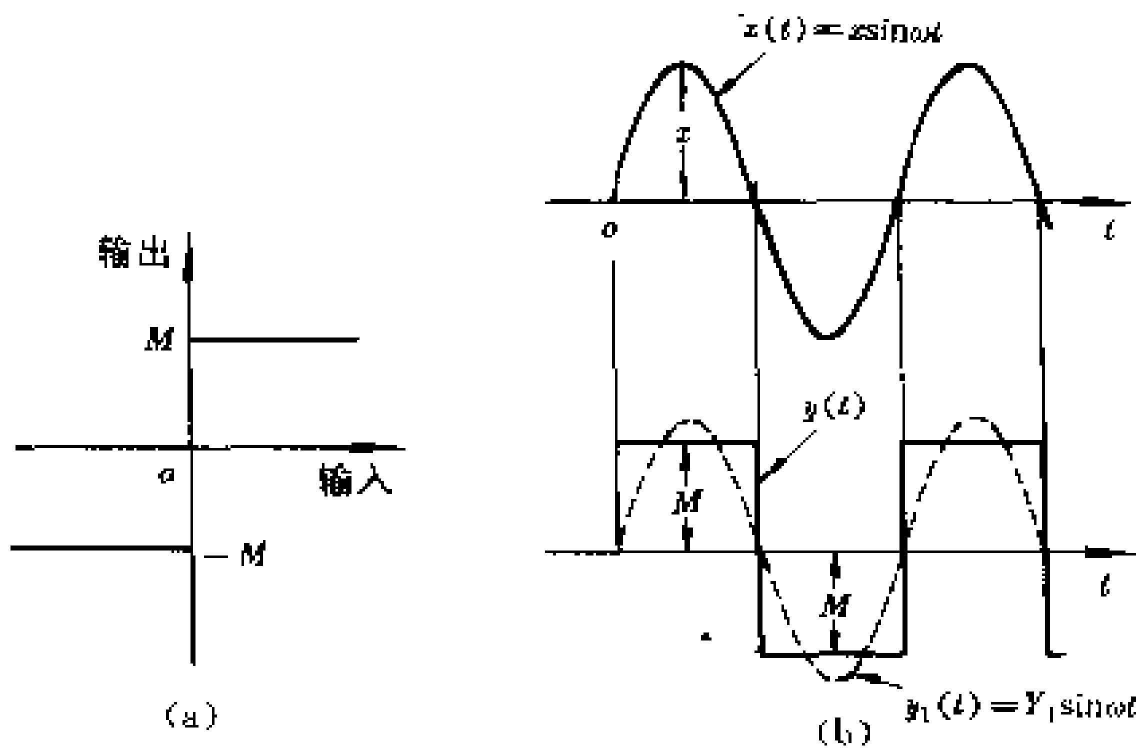


图 2-1 (a)继电器型非线性的输入—输出特性曲线；(b)继电器型非线性的输入和输出波形

这种元件的输出 $y(t)$ 的付里叶展开式为

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t + B_n\sin n\omega t)$$

如图 2-1(b) 所示，输出是一个奇函数。对于任何奇函数，$A_n = 0(n = 0,1,2,\cdots)$。因此

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin n\omega t$$

$y(t)$的一阶谐波分量是

$$y_1(t) = B_1\sin\omega t$$

式中

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin\omega t d(\omega t)$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y(t)\sin\omega t d(\omega t)$$

以 $y(t)=M$ 代入此方程得

$$B_1 = \frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\omega t d(\omega t) = \frac{4M}{\pi}$$

$$y_1(t) = \frac{4M}{\pi}\sin\omega t$$

于是，描述函数 N 由下式给出：

$$N = \frac{Y_1}{X}\angle 0° = \frac{4M}{\pi X} \quad (2.6)$$

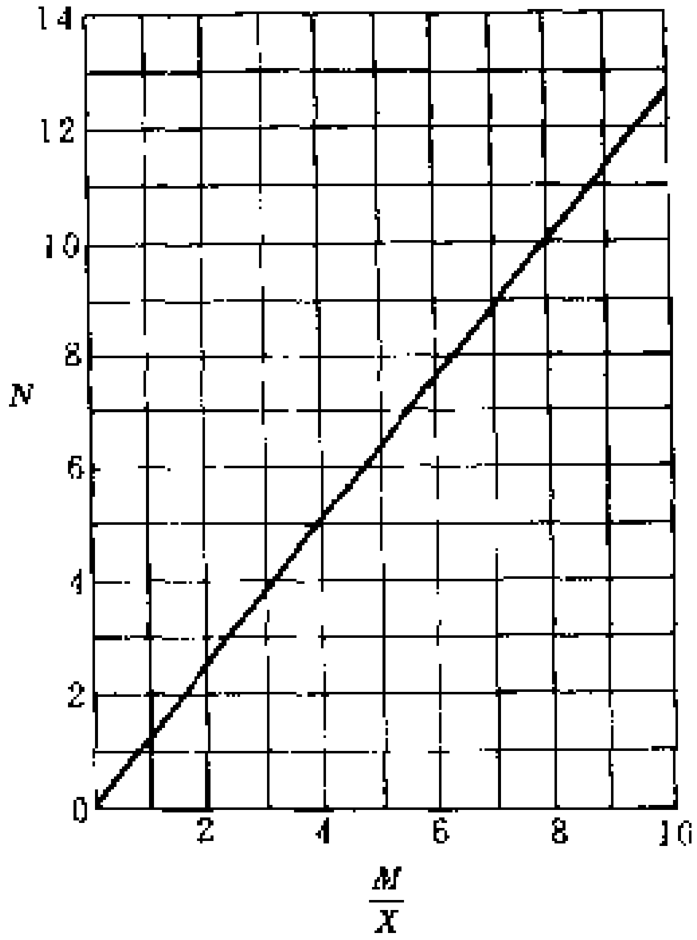


图 2-2　继电器型非线性的描述函数

显然，继电器型元件的描述函数是一个实函数，并且只和输入振幅 X 有关。图 2-2 所示的是该描述函数对 M/X 的曲线。

2. **具有滞环的继电器型非线性**　设有一个具有滞环的继电器型非线性，其输入—输出特性曲线如图 2-3(a)所示，输入和输出波形如图 2-3(b)所示。显然，输出是方波，并且按照 $\omega t_1 = \sin^{-1}(h/X)$ 落后于输入。因此，该非线性元件的描述函数是

$$N = \frac{4M}{\pi X}\angle -\sin^{-1}\left(\frac{h}{X}\right) \quad (2.7)$$

不过，绘制

$$\frac{h}{M}N = \frac{4h}{\pi X}\angle -\sin^{-1}\left(\frac{h}{X}\right) \quad (2.7a)$$

关于 h/X 的曲线比绘制 N 关于 h/X 的曲线要方便些，因为 hN/M 只是 h/X 的函数。图 2-4 所示的就是 hN/M 关于 h/X 的曲线。

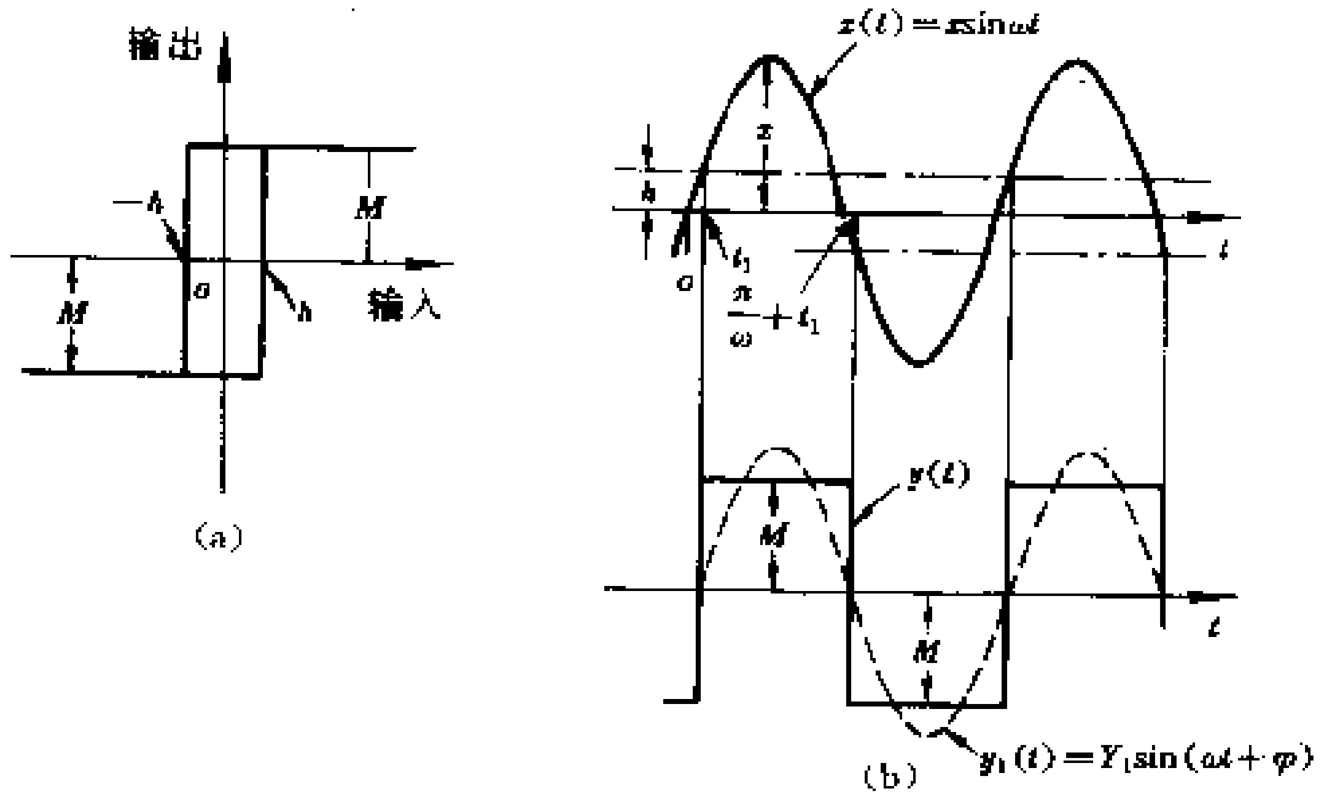


图 2-3　(a)具有滞环的继电器型非线性的输入一输出特性曲线；

(b)具有滞环的继电器型非线性的输入和输出波形

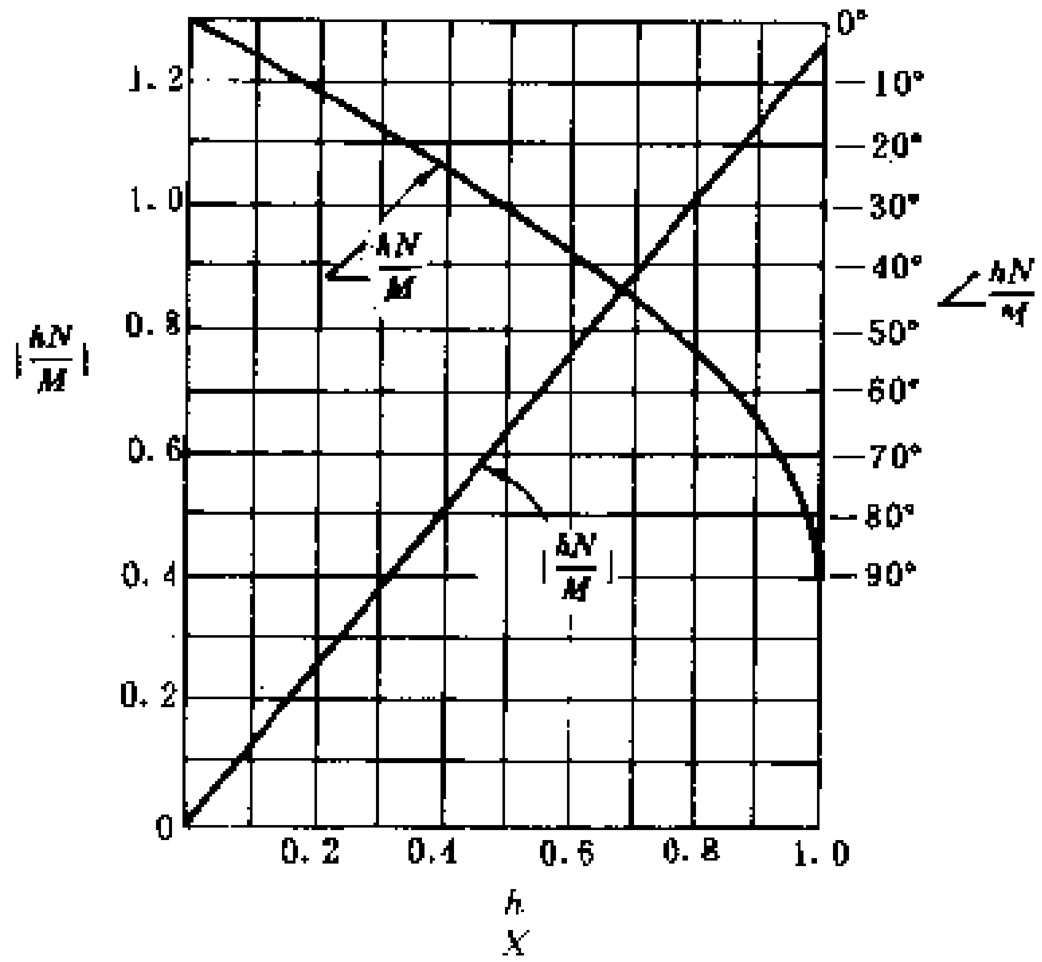


图 2-4　具有滞环的继电器型非线性的描述函数

3. 死区非线性　死区非线性有时也称为界限非线性。图 2-5

(a)所示的是一个典型的输入—输出特性曲线。图 2-5(b)表示输入和输出的波形。在具有死区的元件中，当输入在死区的幅值范围内时就没有输出。

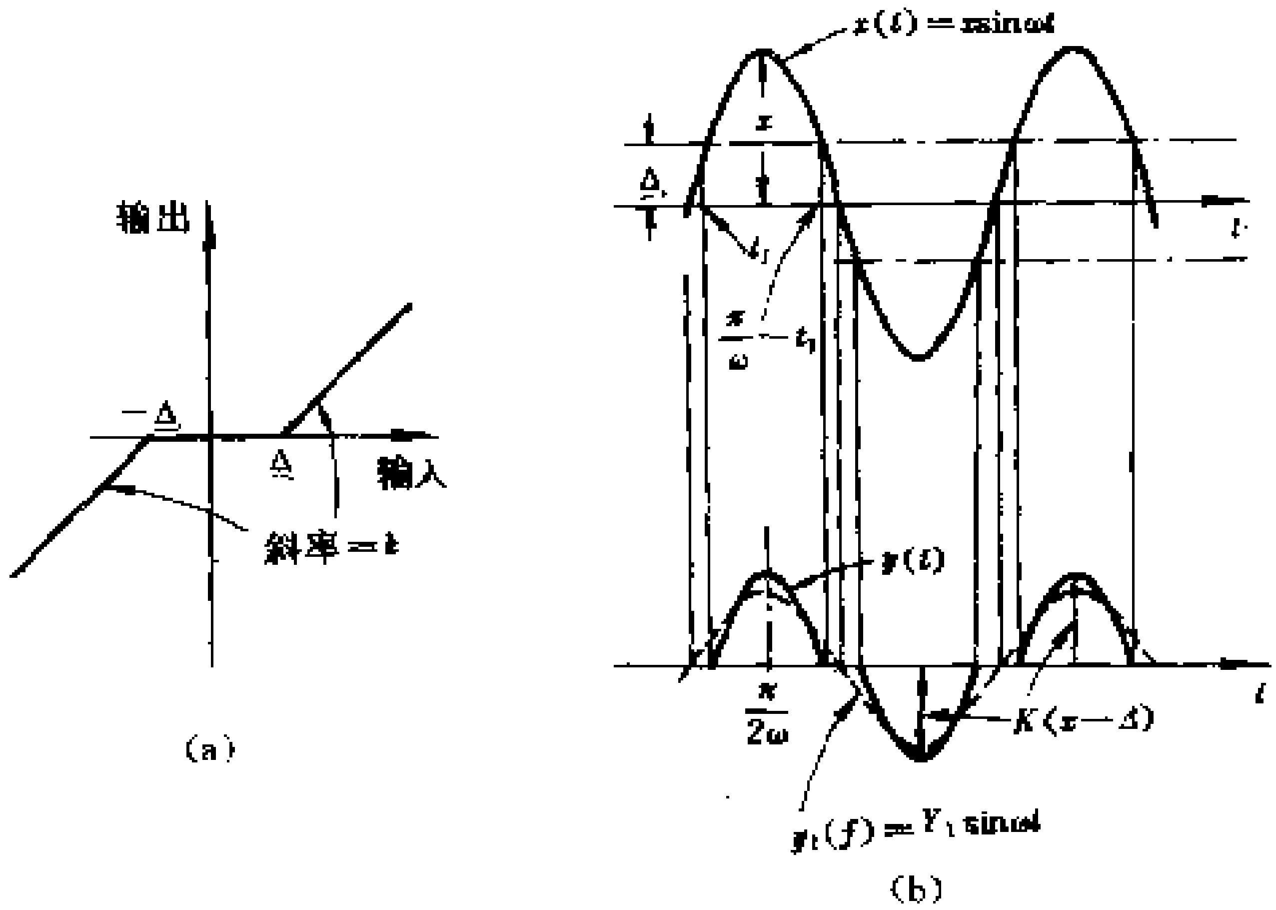


图 2-5 (a)死区非线性的输入—输出特性曲线

(b)死区非线性的输入和输出波形

对于图 2-5(a)所示的具有死区的元件，当 $0\leqslant\omega t\leqslant\pi$ 时，输出 $y(t)$ 由下式给出：

$$y(t)=\begin{cases}0 & (0<t<t_1)\\ k(X\sin\omega t-\Delta) & \left(t_1<t<\dfrac{\pi}{\omega}-t_1\right)\\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{\omega}-t_1<t<\dfrac{\pi}{\omega}\right)\end{cases} \tag{2.8}$$

因为输出 $y(t)$ 是重复的奇函数，它的付里叶展开式仅有正弦项，所以输出的一次谐波分量由下式给出：

$$y_1(t)=B_1\sin\omega t$$

式中

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin\omega t d(\omega t) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} y(t)\sin\omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{4k}{\pi}\int_{\omega t_1}^{\pi/2}(X\sin\omega t - \Delta)\sin\omega t d(\omega t)$$

注意

$$\Delta = X\sin\omega t_1$$

即

$$\omega t_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\Delta}{X}\right)$$

因此

$$B_1 = \frac{4Xk}{\pi}\left[\int_{\omega t_1}^{\pi/2}\sin^2\omega t d(\omega t) - \sin\omega t_1\int_{\omega t_1}^{\pi/2}\sin\omega t d(\omega t)\right]$$

$$= \frac{2Xk}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{\Delta}{x}\right) - \frac{\Delta}{x}\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{x}\right)^2}\right]$$

于是，具有死区的元件的描述函数为

$$N = \frac{B_1}{x}\angle 0° = k - \frac{2k}{\pi}\left[\sin^{-1}\frac{\Delta}{X} + \frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}\right] \qquad (2.9)$$

图 2-6 表示了作为 Δ/X 的函数的 N/k 曲线。注意，当 $(\Delta/X)>1$ 时，输出为零，从而描述函数的值也为零。

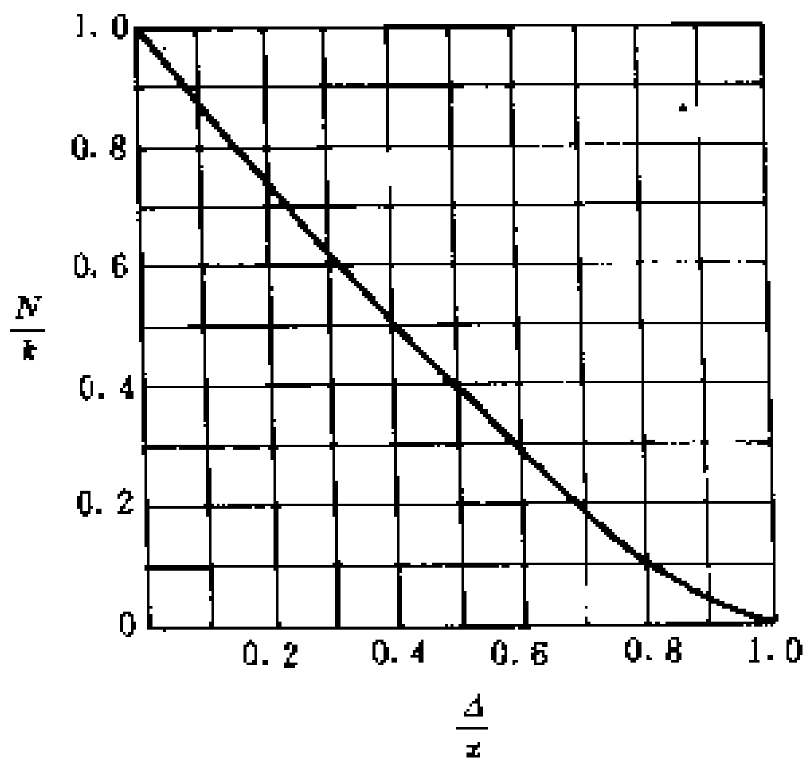


图 2-6 死区非线性的描述函数

4. 饱和非线性 图 2-7(a)所示的是饱和非线性的一个典型的输入—输出特性曲线。对于小的输入信号，饱和元件的输出与输入是成比例的，对于大的输入

信号，输出将不成比例增加，而对于非常大的输入信号，输出则是常数。图 2-7(b)描绘的是饱和非线性的输入和输出波形。

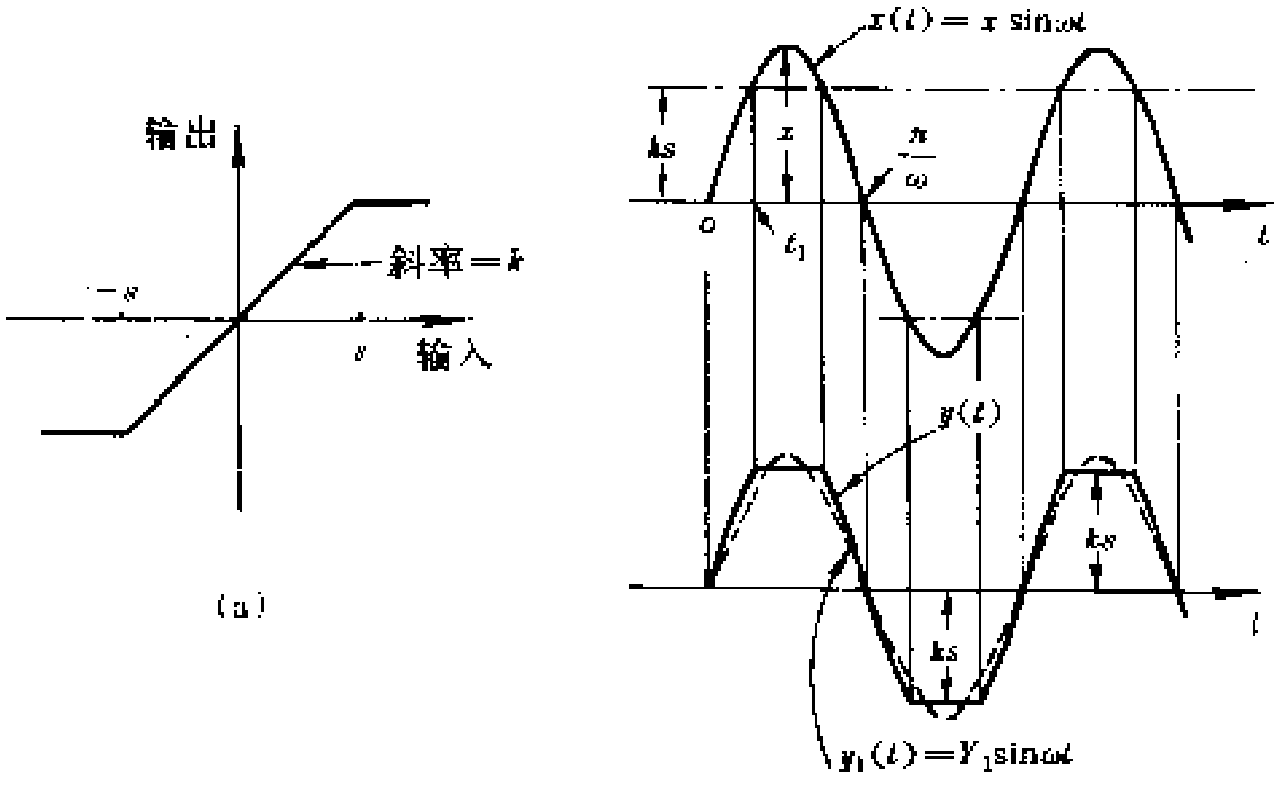


图 2-7 (a)饱和非线性的输入—输出特性曲线；
(b)饱和非线性的输入和输出波形

对这种元件，所求的描述函数为

$$N = \frac{2k}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\frac{S}{X}\right) + \frac{S}{X}\sqrt{1 - \left(\frac{S}{X}\right)^2}\right] \qquad (2.10)$$

图 2-8 表示了作为 S/X 的函数的 N/k 的曲线。当 $(S/X) > 1$ 时，描述函数的值是 1。

注意，死区非线性的描述函数和饱和非线性的描述函数有下述关系：

$N_{死区} = k - N_{饱和}$

(当 $\Delta = S$ 时)

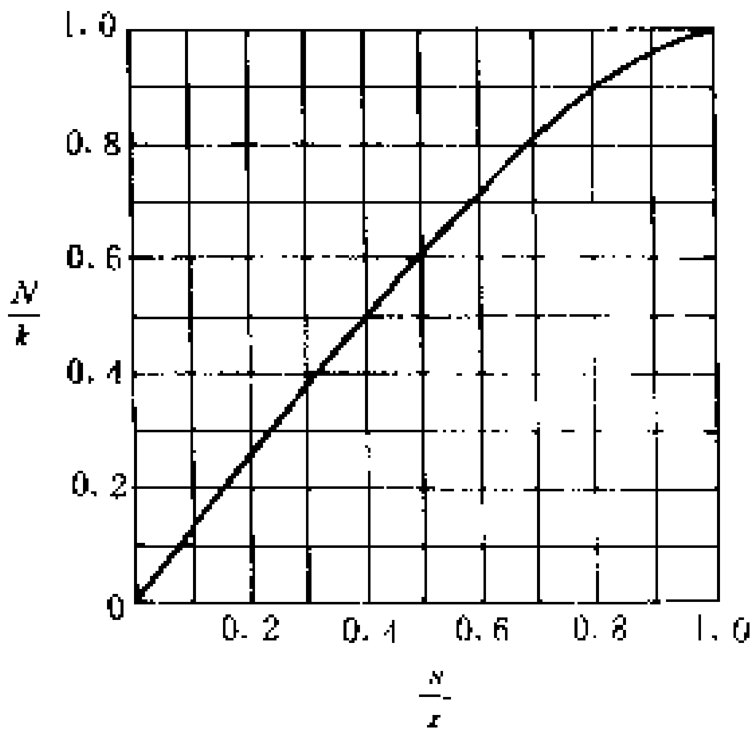


图 2-8 饱和非线性的描述函数

三、非线性反馈控制的稳定性分析

许多包含非线性环节的控制系统可以用图 2-9 所示的方块图来代表。如果由非线性环节产生的高阶谐波通过线性环节已被充分地衰减(线性环节通常表现为低通滤波器),那么非线性环节的输出中有意义的只是一阶谐波分量,于是,系统的稳定性就能用描述函数分析来评定。

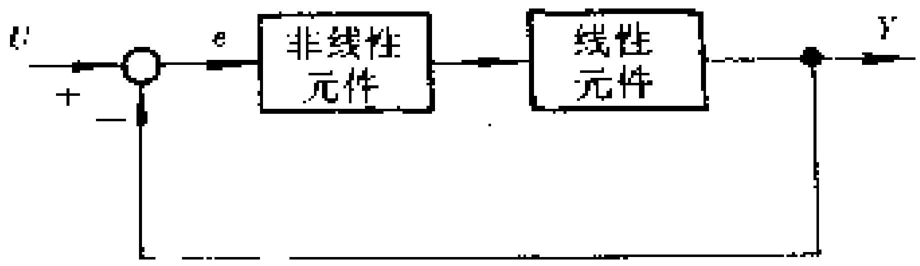


图 2-9 非线性控制系统

1. 描述函数和稳定性分析 我们将首先讨论怎样用非线性元件的描述函数来对非线性控制系统的稳定性进行分析。并说明如果在系统的输出中存在持续振荡,那么,振荡的振幅和频率可以根据频率域中的图解法来确定。

设有图 2-10 所示的系统。方块 N 表示非线性元件的描述函数。如果高次谐波已被充分地衰减,则描述函数 N 可以作为一个实变量或复变量的增益来处理。于是,闭环频率响应为

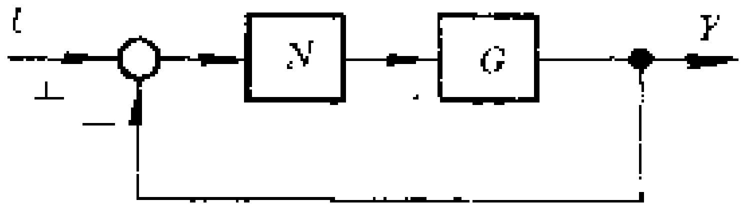


图 2-10 非线性控制系统

$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{NG(j\omega)}{1 + NG(j\omega)}$$

特征方程为

$$1 + NG(j\omega) = 0$$

即

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N} \tag{2.11}$$

如果方程(2.11)被满足，那么系统的输出将出现极限环，此情况相当于 $G(j\omega)$ 轨迹穿过临界点。（在线性控制系统的通常的频率响应分析中，临界点是 $-1+j0$ 点。）

在描述函数分析中，对通常的频率响应分析进行了修改，使得整个 $-1/N$ 轨迹变成为临界点的轨迹。因此，可利用 $-1/N$ 轨迹和 $G(j\omega)$ 轨迹之间的相对位置来判别稳定性。

为了确定系统的稳定性，我们画出 $-1/N$ 和 $G(j\omega)$ 的轨迹。在目前的分析中，我们假定系统的线性部分是开环稳定的，即 $G(s)$ 的所有极点和零点均位于 s 平面的左半部，包括 $j\omega$ 轴。这时稳定性判据是：如果 $-1/N$ 轨迹没有被 $G(j\omega)$ 轨迹包围，那么系统就是稳定的，即在稳定状态时没有极限环。

另一方面，如果 $-1/N$ 轨迹被 $G(j\omega)$ 轨迹所包围，那么系统就是不稳定的，当系统受到任何干扰时，系统的输出将无限增加。

如果 $-1/N$ 轨迹和 $G(j\omega)$ 轨迹相交，那么系统的输出可能出现持续振荡，即极限环。这种持续振荡不是正弦的，但它可以用一个正弦振荡来近似。持续振荡是用在交点处 $-1/N$ 轨迹上的 X 值和 $G(j\omega)$ 轨迹上的 ω 值来表征的。

一般来说，控制系统不应该出现极限环，尽管振幅很小的极限环在某些应用范围内可能是允许的。

2. **持续振荡或极限环的稳定性**　极限环的稳定性可分析如下：设有图 2-11 所示的系统。假设在 $-1/N$ 轨迹上的点 A 相当于一个较小的 X 值，而在 $-1/N$ 轨迹上的点 B 相当于一个较大的 X 值，这里的 X 是输入到非线性元件的正弦信号的振幅。X 的值在 $-1/N$ 轨迹上朝着由点 A 到点 B 的方向增加。

我们假设系统最初在点 A 工作，其振荡具有振幅 X_A 和频率 ω_A，它们分别由 $-1/N$ 轨迹和 $G(j\omega)$ 轨迹来确定。假定对工作在点

A 的系统给一个轻微的扰动，使非线性元件的输入振幅略有增加(例如，假设工作点在 $-1/N$ 轨迹上从点 A 移到点 C)。那么，工作点 C 相当于线性控制系统的临界点，即相当于复平面上的 $-1+j0$ 点。因此，如图 2-11 所示，在乃奎斯特判据的观点上 $G(j\omega)$ 包围了点 C。这类似于线性系统的开环轨迹包围 $-1+j0$ 点的情况。因此振幅将增加，并且工作点朝 B 点运动。其次，假定有一个轻微的扰动，使非线性元件的正弦输入的振幅减小。假设工作点在 $-1/N$ 轨迹上从点 A 运动到点 D，那么点 D 就相当于临界点。在这种情况下，$G(j\omega)$ 轨迹不包围临界点，所以非线性元件的输入振幅就减小，并且工作点进一步从点 D 向左边移动。因此，点 A 具有发散的特性，即相当于一个不稳定的极限环。

再考虑下面的这种情况：对工作在点 B 的系统给与一个轻微的扰动。假设在 $-1/N$ 轨迹上工作点移到点 E，那么，在这种情况下，$G(j\omega)$ 轨迹不包围临界点(点 E)，于是非线性元件的正弦输入的振幅就减小，并且工作点向点 B 移动。

同样地，假设有一个轻微的扰动引起系统的工作点从点 B 移向点 F，因此，$G(j\omega)$ 轨迹包围了临界点(点 F)，振荡的振幅将增加，并且工作点从 F 朝向点 B 移动。所以，点 B 具有收敛的特性。工作在点 B 的系统是稳定的，换句话说，在这个点上的极限环是稳定的。

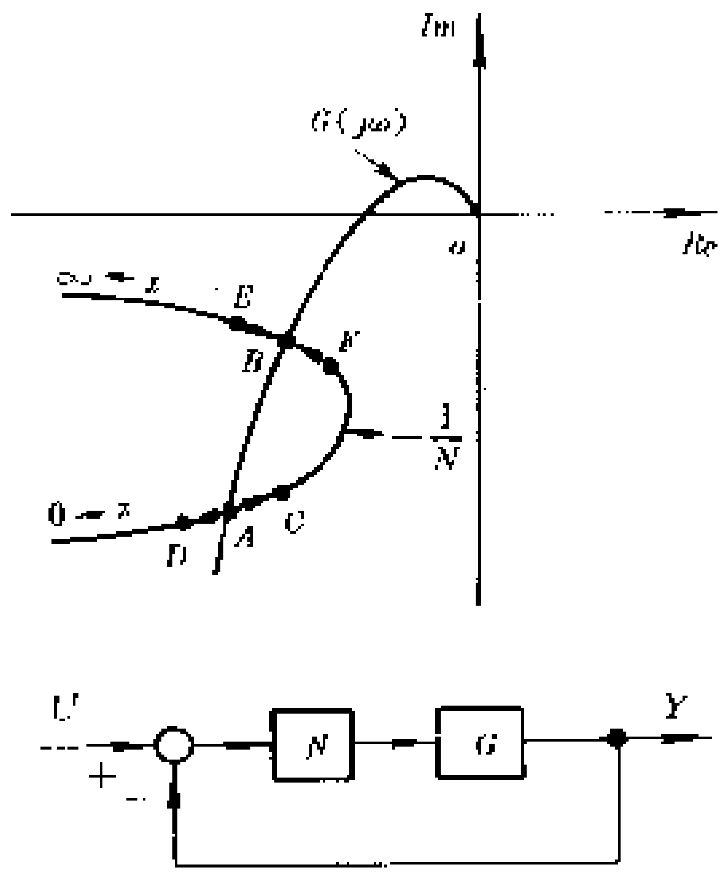


图 2-11　非线性控制系统的极限环工作状态的稳定性分析

对于图 2-11 所示的系统，

相当于点 B 的稳定极限环能通过实验观察到，但相当于点 A 的不稳定极限环却观察不到。

〔例 1〕 图 2-12 表示一个具有饱和非线性的控制系统。我们假设 $G(s)$ 是最小相位传递函数（不含延时因子）。图 2-13 表示了 $-1/N$ 轨迹和 $G(j\omega)$ 轨迹的图形。由于 $-1/N$ 轨迹从负实轴上的 -1 点出发延伸至 $-\infty$，显然，N 只是输入信号 $x(t)=X\sin\omega t$ 的振幅的函数，$G(j\omega)$ 只是 ω 的函数。

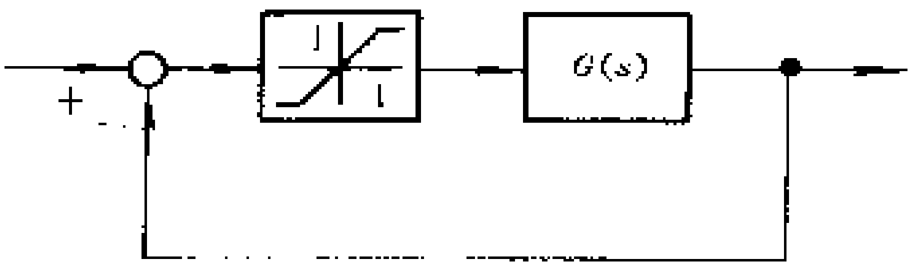


图 2-12 具有饱和非线性的控制系统

图 2-13 表示两条轨迹相交，其交点相当于一个稳定极限环。极限环的振幅是由 $-1/N$ 轨迹来确定的，如 $X=X_1$。极限环的频率是由 $G(j\omega)$ 轨迹来确定的，如 $\omega=\omega_1$。

在没有任何参考输入时，该系统的输出在稳态时呈现为振幅等于 X_1 和频率等于 ω_1 的持续振荡。

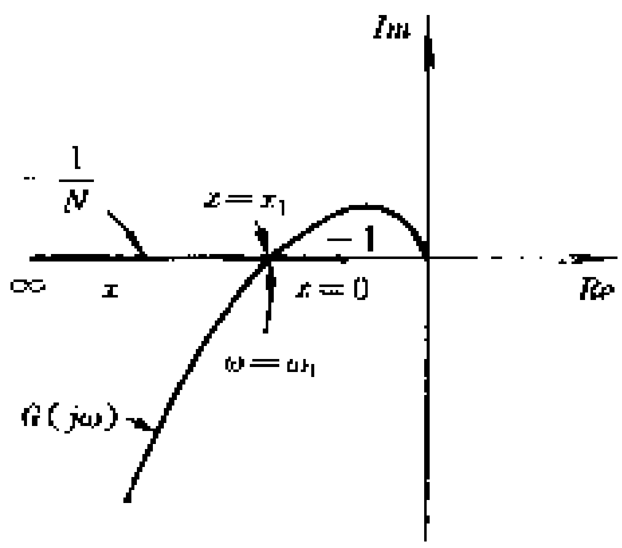


图 2-13 用于稳定性分析的 $1/N$ 和 $G(j\omega)$ 的图形

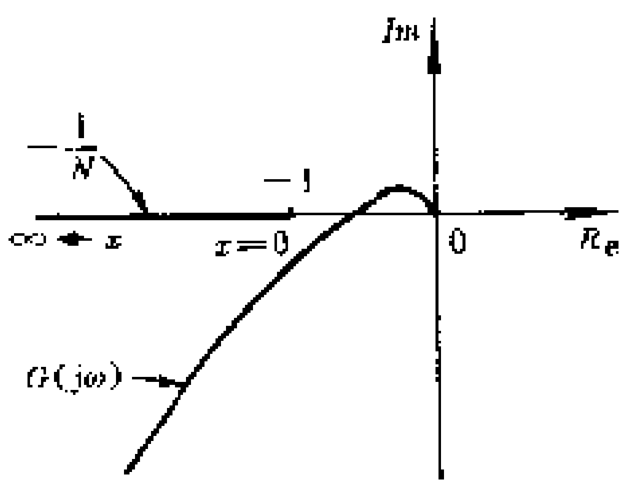


图 2-14 用于稳定性分析的 $-1/N$ 和 $G(j\omega)$ 的图形

如果传递函数 $G(s)$ 的增益减小，因而使 $-1/N$ 轨迹和 $G(j\omega)$ 轨迹不相交，如图 2-14 所示，那么系统便成为稳定的。在系统的输出中由于干扰可能引起的任何振荡都会消逝，在稳态时不存在持续振荡。这是因为 $-1/N$ 轨迹位于 $G(j\omega)$ 轨迹在左边，即 $G(j\omega)$ 轨迹不包围 $-1/N$ 轨迹。

〔例 2〕图 2-15 表示死区非线性的 $-1/N$ 轨迹和 $G(j\omega)$ 轨迹，在该系统中，$-1/N$ 轨迹和 $G(j\omega)$ 轨迹彼此相交。但这种情况下的极限环是不稳定的，振荡不是逐渐消逝，就是振幅无限地增加。这是一种不希望的情况，必须加以回避。

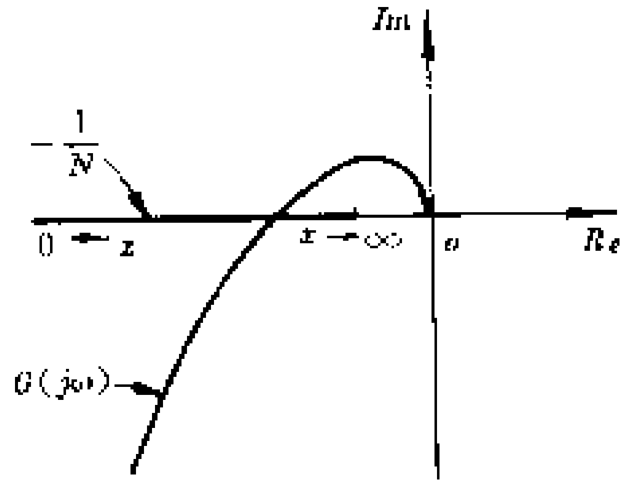


图 2-15 用于稳定性分析的 $-1/N$ 和 $G(j\omega)$ 的图形

〔例 3〕设有图 2-16 所示的系统，试确定滞环对系统极限环工作状态的振幅和频率和影响。

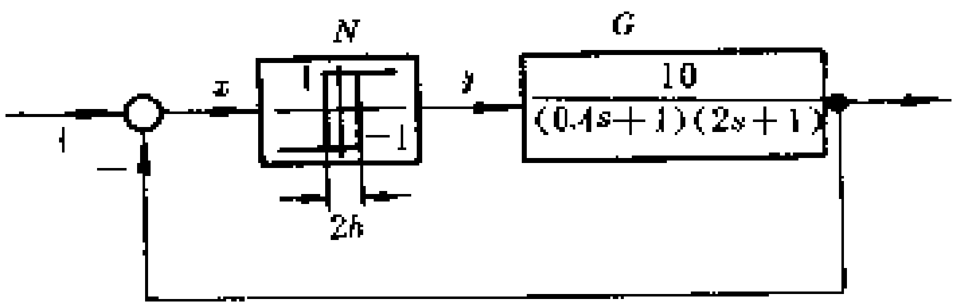


图 2-16 非线性控制系统

图 2-17 所示的是对于三个不同的 h 值，即 $h=0.1, 0.2, 0.3$ 的 $-1/N$ 轨迹和 $G(j\omega)$ 轨迹。$-1/N$ 轨迹均是平行于实轴的直线。N 的值是根据图 2-4 求得的。

根据图 2-17，我们能看出极限环的振幅和频率是：

$x=0.27$，　　$\omega=7$　　（如果 $h=0.1$）

$x=0.42$，　　$\omega=5.9$　　（如果 $h=0.2$）

$x=0.57$，　　$\omega=5.1$　　（如果 $h=0.3$）

观察这些值得出，正如我们预期的那样，随着滞环幅度的加宽，极限环的频率减小，但是极限环的振幅却增加。

描述函数分析是把线性方法应用于非线性系统研究的一种推广。所以，它只适用于非线性程度低的系统。在非线性程度高的系统的分析中，应用描述函数可能导致非常错误的结论。因此，这就限定了描述函数只适用于程度低的非线性系统。

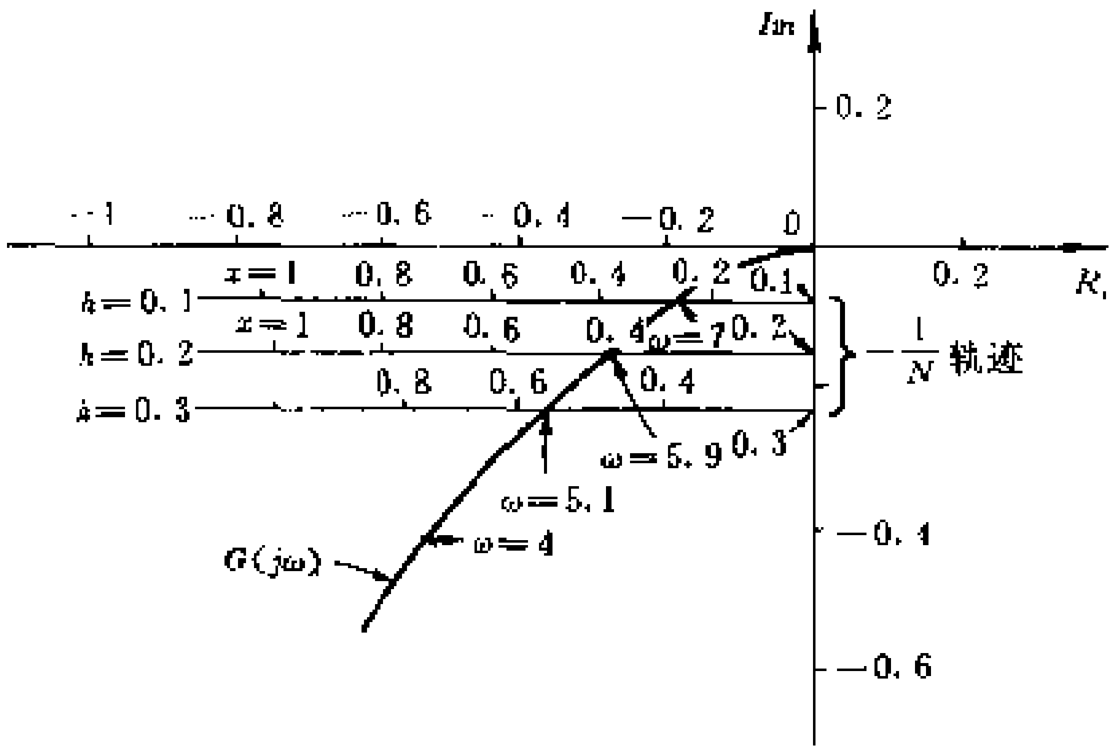


图 2-17　图 2-16 所示系统的 $-1/N$ 和 $G(j\omega)$ 轨迹图

现在，我们来归纳一下非线性系统的描述函数法。

1. 描述函数法是可以用来讨论非线性控制系统稳定性的一种近似方法。在应用此方法时，我们一定要记住基本的假定条件和限制条件。虽然，许多实际的控制系统满足描述函数法的基本假定条件，但有一些系统还是不满足的。因此，对于每一种情况，都需要检查描述函数法是否有效。

2. 在描述函数分析中，系统中出现的非线性的性质决定了分析的复杂性。换句话说，无论什么阶次的线性元件并不影响分析的复杂性。这种方法的一个优点是：对于线性部分具有复杂动态特性的系统，不会使分析复杂。高阶系统的分析准确度比低阶系统的要好，因为高阶系统通常具有较好的低通滤波特性。

3. 虽然在评定某些系统的稳定性时描述函数法是非常有用的，但它却只能提供少数与瞬态响应特性有关的信息。

4. 描述函数法应用于工作设计课题是方便的，它使我们有可能应用频率响应法去改造 $G(j\omega)$ 轨迹。当设计者只需要粗略地知

道某些非线性影响时，或者只需要粗略地知道控制回路内线性或非线性部分的改变会产生什么影响时，描述函数分析是特别有效的。这类分析以图解的形式给出与稳定性有关的信息，如果需要的话，它还可以提出改善响应特性的方法。当在复平面上画出 $-1/N$ 轨迹和 $G(j\omega)$ 轨迹时，根据曲线能够迅速地估计出系统的性能。如果有必要改善性能，通过改变轨迹就可以达到。轨迹的这种改变提供了一个适当的补偿网络的形式。值得注意，尽管描述函数法可以使我们能以工程上的准确度来预计极限环，但在设计课题中，这个方法却当作否定的判据来运用，即：调整系统的参数直到极限环的条件被消除而适当的相对稳定性得到确保时为止。

5. 一个物理系统可能具有两个或更多个有意义的非线性单元。对于一个特定的工作条件，如果只有一个非线性单元成为有意义的时候，其它非线性单元的影响在分析中可以忽略掉。例如，如果系统有小信号非线性和大信号非线性两种环节，当信号的幅度很大时，前者就可以忽略掉，反过来也一样。主要的是要记住，两个非线性串联后的描述函数通常不是单个描述函数之积。所以，如果有两个或更多的非线性元件，彼此间没有有效的低通滤波器相隔的话，当在某个工作条件下同时都成为有意义的时候，它们便可以结合在一个方块里，并且可以求出这个方块的等效描述函数。在这种情况下，描述函数可能与振幅和频率都有关。

§3 相平面分析

最简单非线性系统是一阶的或是二阶的。一个二阶系统具有两个状态变量。二阶系统的状态空间是二维平面，也称为**相平面**。状态轨迹也称为**相轨迹**。通过相平面轨迹的研究可以了解二阶系统的时域特性。基于目前的数学工具，只有二阶非线性系统可以进行比较一般的研究。从而也可以获得非线性系统各种行为的初步

概念。下面的讨论将从二阶线性系统开始，进而讨论分段线性系统，最后介绍一般二阶非线性系统相轨迹的作图法。

一、二阶线性系统的相轨迹

在分析非线性伺服系统之前，先用相平面法来分析第二章中曾研究过的标准的二阶线性伺服系统。这个系统的方块图如图 3-1 所示。

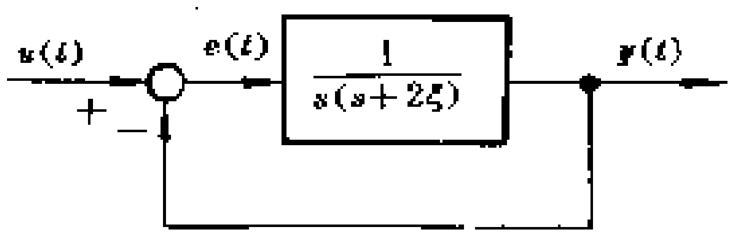


图 3-1　标准的线性伺服系统

标准的二阶伺服系统的开环传递函数为 $G(s)=\omega_n^2/s(s+2\omega_n\zeta)$。把它规格化，用 s/ω_n 代替 s，把时间缩短为 $1/\omega_n$ 倍，使固有频率为 1。因此，这个系统的规格化的闭环传递函数可以写成

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^2+2\zeta s+1}$$

时域的方程可以写成

$$\ddot{y}(t)+2\zeta\dot{y}(t)+y(t)=u(t) \tag{3.1}$$

第二章曾经指出，偏差函数 $e(t)=u(t)-y(t)$ 可以用来描写系统的伺服特性。对于单位阶跃输入，即 $u(t)=1(t)$ 时，由于式(3.1)，$e(t)$ 满足方程：

$$\ddot{e}+2\zeta\dot{e}+e=0 \tag{3.2}$$

对于式(3.2)这样的线性系统，如第二章所述，可直接求解方程，因此很易在相平面上作出相迹。图 3-2 是各种阻尼系数时系统的过渡响应和相平面$(e,\dot{e})$上的轨迹。

从图 3-2 可知，$\zeta=0$ 时，式(3.1)的解是等幅振荡，$\zeta=0.5$ 时则为衰减振荡。$\zeta=2$ 时阻尼太大，解变为非振荡的形式。

在式(3.2)中固定 $\zeta=1$，在各种初始条件下的解轨迹如图 3-3 所示。图中 A、B、C 分别表示不同的初始状态。

由图 3-3 可以看出，不同初始条件的响应曲线对应着相平面

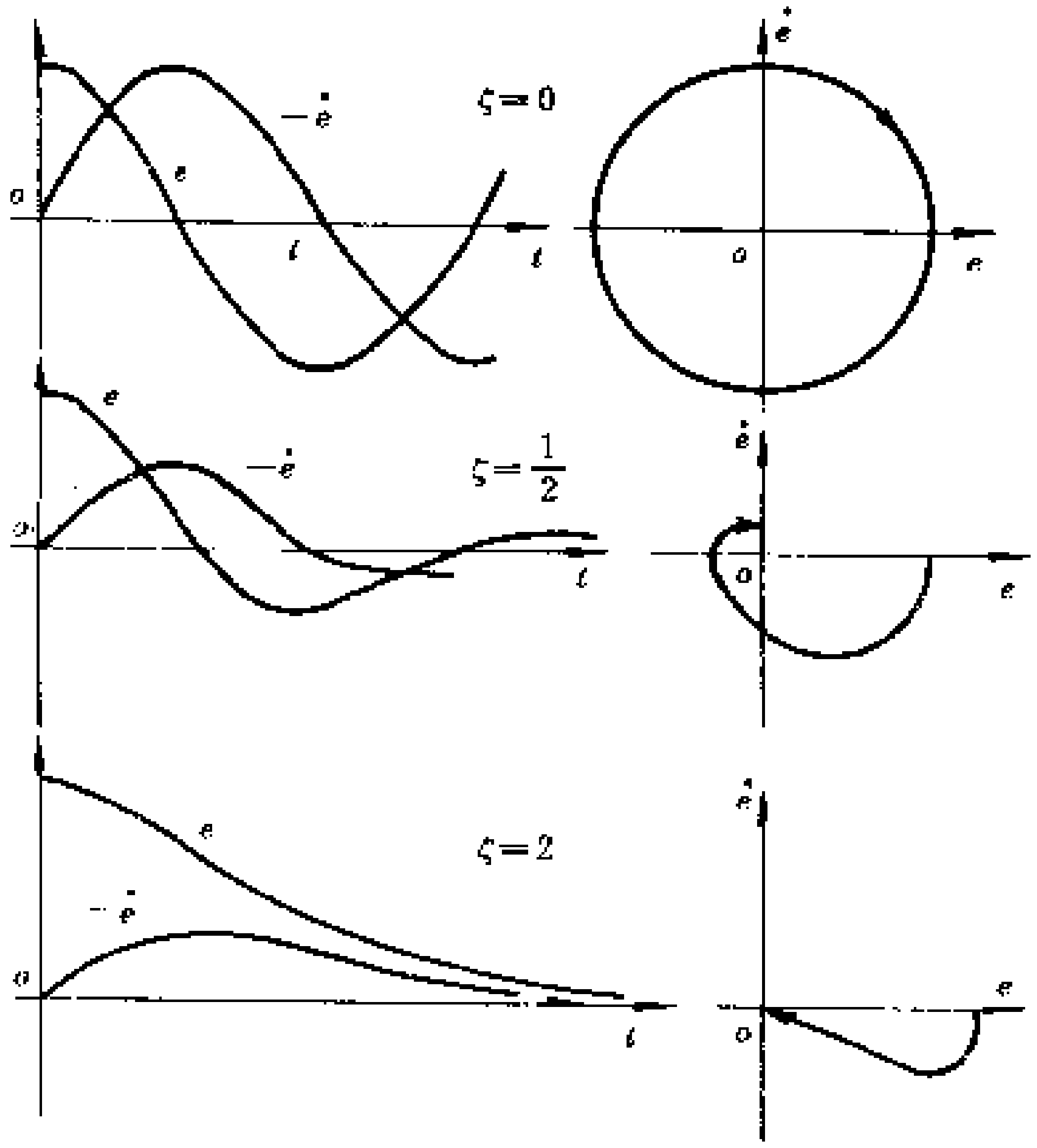


图 3-2 各种阻尼系数时的过渡响应和相轨迹

上一族相轨迹，除原点以外，相平面上每一个点都有且只能有一条相迹通过。所有相轨迹都汇聚于原点。

设 $x_1 = e, x_2 = \dot{e}$，方程(3.2)可以写成状态方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2\zeta x_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

相应的特征方程为

$$\lambda^2 + 2\zeta\lambda + 1 = 0$$

特征根为

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{3.4}$$

方程(3.3)的解具有如下形式：

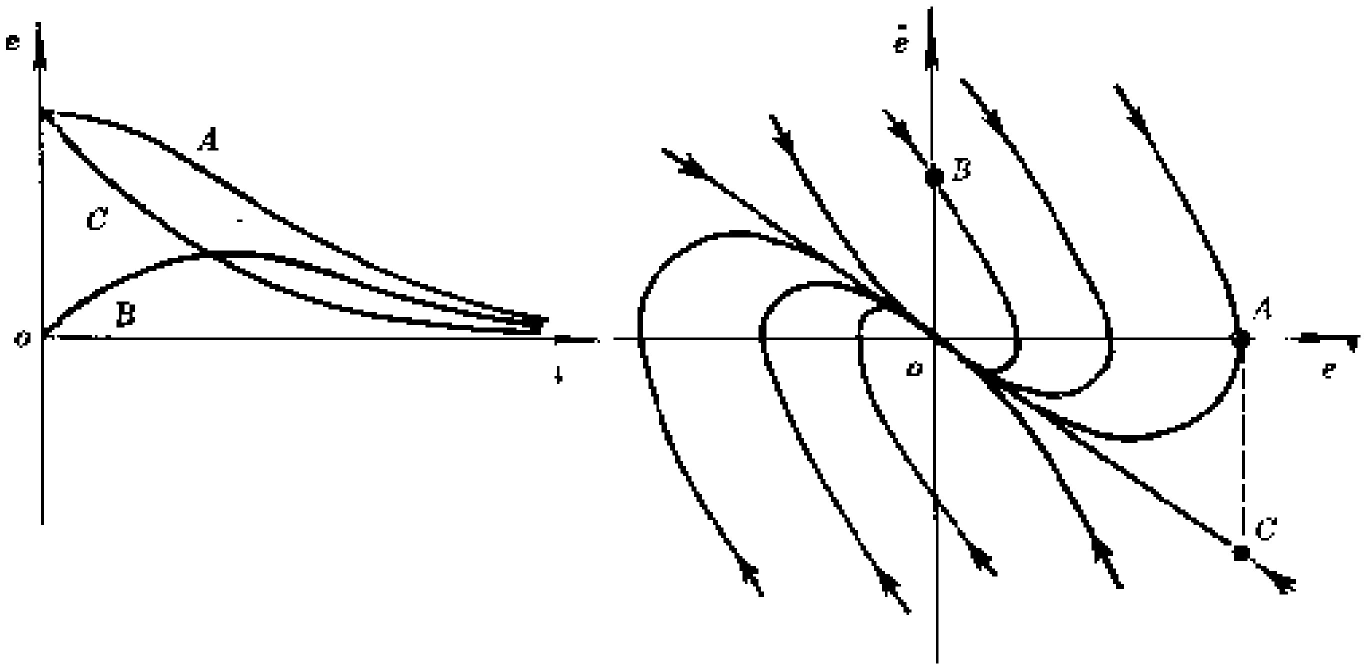


图 3-3　各种初始状态下的时间响应和相轨迹

$$\begin{cases} x_1 = r_1 e^{\lambda_1 t} + r_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_2 = r_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + r_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \tag{3.5}$$

r_1, r_2 为积分常数，由初值 x_{10}, x_{20} 决定。根据式(3.3)还可得相轨迹的斜率：

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{x_1}{x_2} - 2\zeta \tag{3.6}$$

可以看出，除原点以外，相平面上所有点相轨迹的斜率是唯一确定的。只有原点的导数是不确定的，所以称为**奇点**。

现在讨论奇点的分类。

(1)　当 $\zeta \geqslant 1$ 时，λ_1 和 λ_2 都是负实数，相轨迹无振荡地趋近于原点。这种奇点称为**节点**；

(2)　当 $1 > \zeta > 0$ 时，λ_1 和 λ_2 是一对具有负实部的复数，相轨迹周期衰减地趋近于原点。这种奇点称为**焦点**；

(3)　当 $\zeta = 0$ 时，λ_1 和 λ_2 为一对纯虚数，相轨迹为一族同心圆(或椭圆)包围着原点。这时原点为孤立奇点，也称为**中心点**。

前面的讨论，假定 $\zeta > 0$，相轨迹收敛于奇点，因而那些奇点是稳定的。相应地有稳定节点和稳定焦点之称。如果 $\zeta < 0$，相当于负

阻尼情形，系统的相轨迹都从奇点出发，发散开来，趋向无穷远。这类奇点是不稳定的。相应地有不稳定节点和不稳定焦点，如图 3-4。

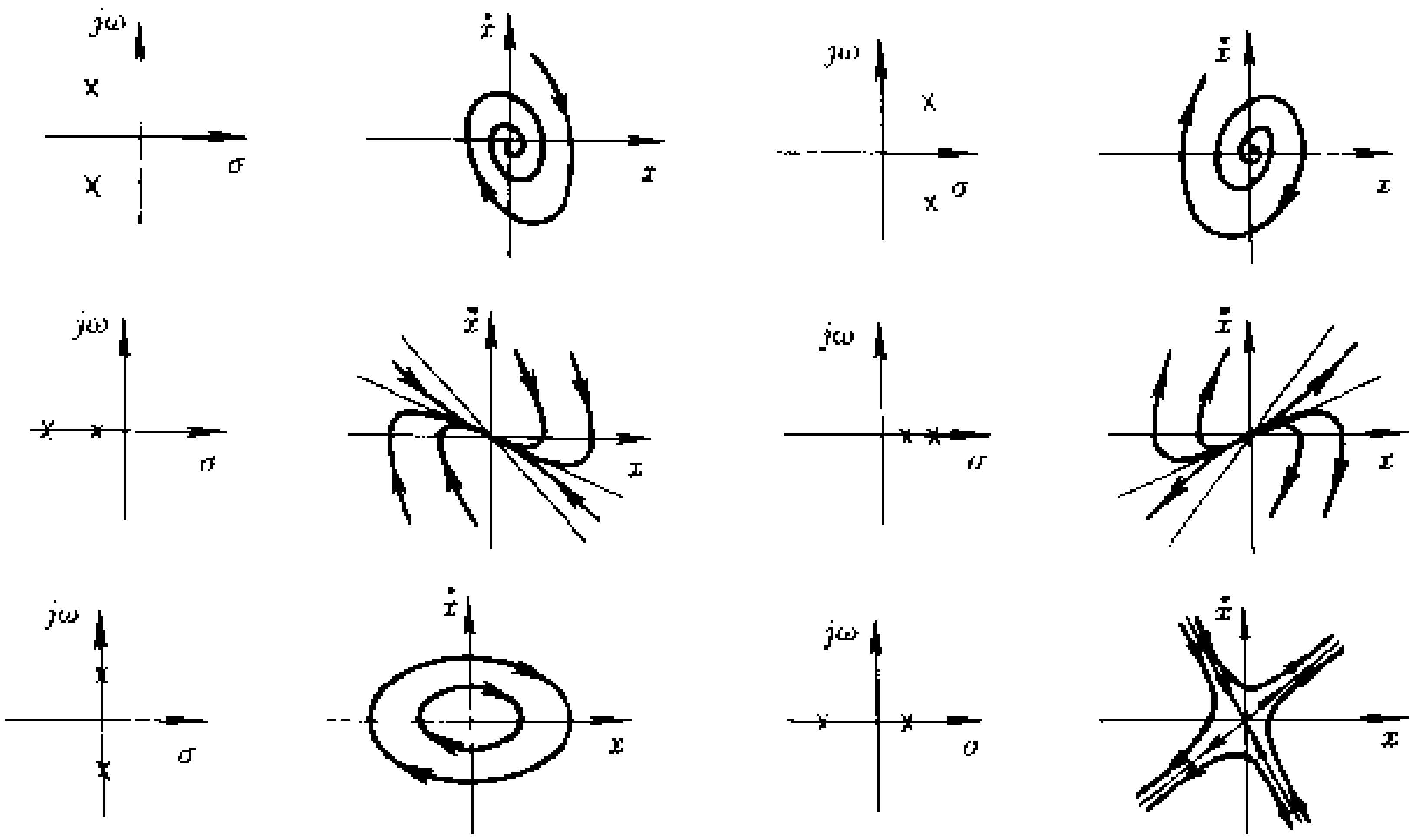


图 3-4　各类奇点

假定状态方程(3.3)中，不仅 ζ 可正可负，并且 x_1 的系数也可取任意实数，方程变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = cx_1 + \mathrm{d}x_2 \end{cases} \tag{3.3a}$$

这时

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = c\frac{x_1}{x_2} + \mathrm{d} \tag{3.6a}$$

注意到方程(3.3a)的解仍然具有式(3.5)的形式，不难证明，当 λ_1，λ_2 为实数时，相轨迹存在两条渐近线。它们的斜率分别为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \lambda_1;\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \lambda_2 \tag{3.7}$$

对于 λ_1,λ_2 都大于零和都小于零的情形已经作过讨论。它们分别对应于稳定的和不稳定的节点。但当 a,b 取某种数值，可使 λ_1 和 λ_2 一个为正，另一个为负。这时所对应的一族相轨迹既不收敛于原点，也不是从原点出发而发散，而是沿着负斜率的渐近线方向自无穷远处而来，掠过原点，而后又沿着另一条渐近线方向趋向无穷远。这种奇点称为**鞍点**。

二、分段线性系统的相轨迹

在具有与信号有关的非线性因素的二阶系统中，可以用几个分段线性系统来近似。这时，整个相平面可以划分成若干区域，其中每一个分区域相应于一个单独的线性工作状态。每一个分区域有一个奇点，尽管这个奇点可以位于这一特定的分区域以外。

如果奇点位于它的分区域以内，则称它为**实奇点**。但是，如果奇点位于它的分区域以外，因而该分区域内的相轨迹永远不能够达到该点，则称其为**虚奇点**。具有与信号有关的非线性因素的二阶系统，只可能有一个实奇点。

与具有一个实奇点的分区域邻接的所有分区域，都将具有虚奇点。每一个奇点的位置和性质，都取决于支配着给定分区域的微分方程。奇点的位置可以取决于输入量。每一个分区域的相平面图，均表示一线性系统的相平面图。在每一个工作分区域的边界上，把各段相轨迹连接起来，就构成了合成相轨迹。这一合成相轨迹，给出了非线性系统的瞬态响应。

下面通过两个例子说明增益可以进行分段线性近似系统的相轨迹及其求解方法。

〔例 1〕设非线性系统如图 3-5(a)所示。用 G_N 表示的环节是一个非线性放大器。输入一输出特性曲线，如图 3-5(b)所示。当偏差信号 e 绝对值大于 e_0 或小于 e_0 时，上述非线性元件的增益分别等于 1 或 k。即

$$m = e \qquad (|e| > e_0) \tag{3.8}$$

$$m = ke \quad (|e| < e_0) \tag{3.9}$$

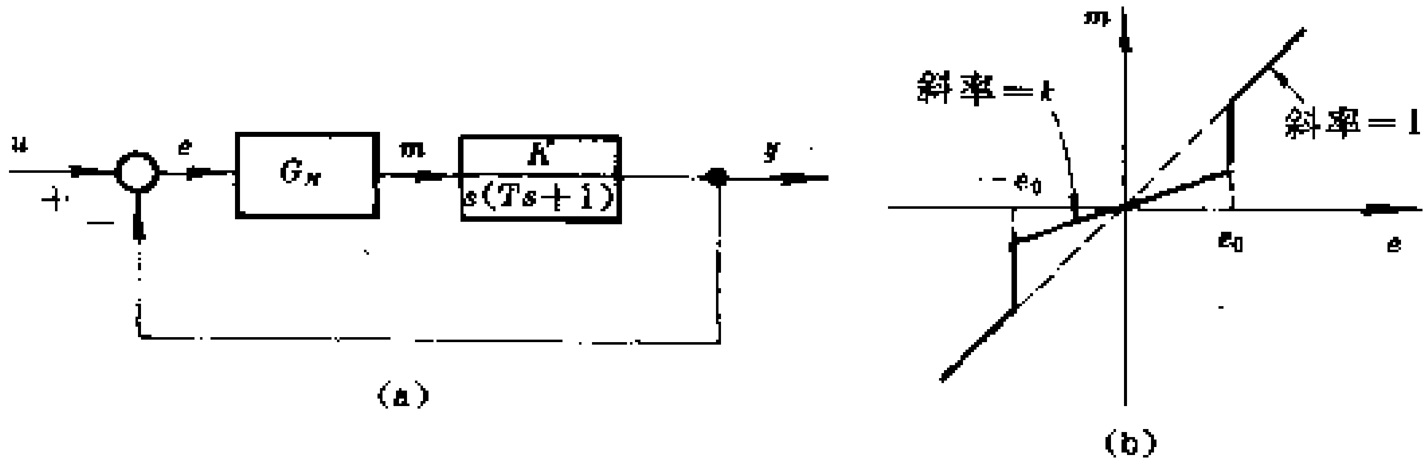


图 3-5　增益分段线性系统

系统在大偏差信号时，具有大的增益，而在小偏差信号时，具有小的增益。改变增益可以通过采用开关装置实现。开关装置能够将放大器的增益，从一个值突然改变到另一个值。在小的 e 值下，系统的响应较为缓慢，而在大的偏差信号下，系统的响应较为迅速。当有小振幅高频率的噪声作用于系统时，这种特性是有益的。因为人们所不希望的噪声信号，这时基本上将被抑制掉，而控制信号却能够满意地传输过去。

因为该系统是分段线性的，所以通过将两个线性系统的相轨迹组合一起，就可以得到该系统的相轨迹。

在这个例子中，我们假设系统开始处于静止状态。联系变量 y 和 m 的微分方程为

$$T\ddot{y} + \dot{y} = Km$$

因为 $e=u-y$，所以上述方程可以改写成

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = T\ddot{u} + \dot{u} \tag{3.10}$$

下面我们来研究系统在阶跃输入量和斜坡(或斜坡－加－阶跃)输入量作用下的情况。

对于阶跃输入信号：因为当 $t>0$ 时，阶跃输入量 $\ddot{u}=\dot{u}=0$，所以方程(3.10)变成

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = 0 \quad (t > 0) \tag{3.11}$$

由方程(3.8),(3.9)和(3.11),我们可以得到下列两个方程:

$$T\ddot{e}+\dot{e}+Ke=0 \quad (|e|>e_0) \tag{3.12}$$

$$T\ddot{e}+\dot{e}+kKe=0 \quad (|e|<e_0) \tag{3.13}$$

首先确定奇点。$\dot{e}=e=0$,即相平面上的原点(0,0)既是方程(3.12)的奇点,也是方程(3.13)的奇点。前者的定义域是$|e|>e_0$,原点是虚奇点。后者的定义域$|e|<e_0$包含原点,原点是实奇点。

在下面的分析中,假设与方程(3.12)相应的特征方程的根是共轭复根,并且位于复平面的左半边。因此,在这种情况下,奇点(0,0)的性质就具有稳定焦点的性质。

假设k值是这样设定的,即在此k值下,与方程(3.13)相应的特征方程的阻尼比等于1。于是,与方程(3.13)相应的奇点便是稳定节点;因此,对于大偏差信号,响应是欠阻尼的,而对于小偏差信号,响应则是临界阻尼的。如果对于所有偏差信号值,m和e之间的关系由$m=ke$或$m=e$来确定。则相平面图将像图3-6(a)或图3—6(b)所示的那样。

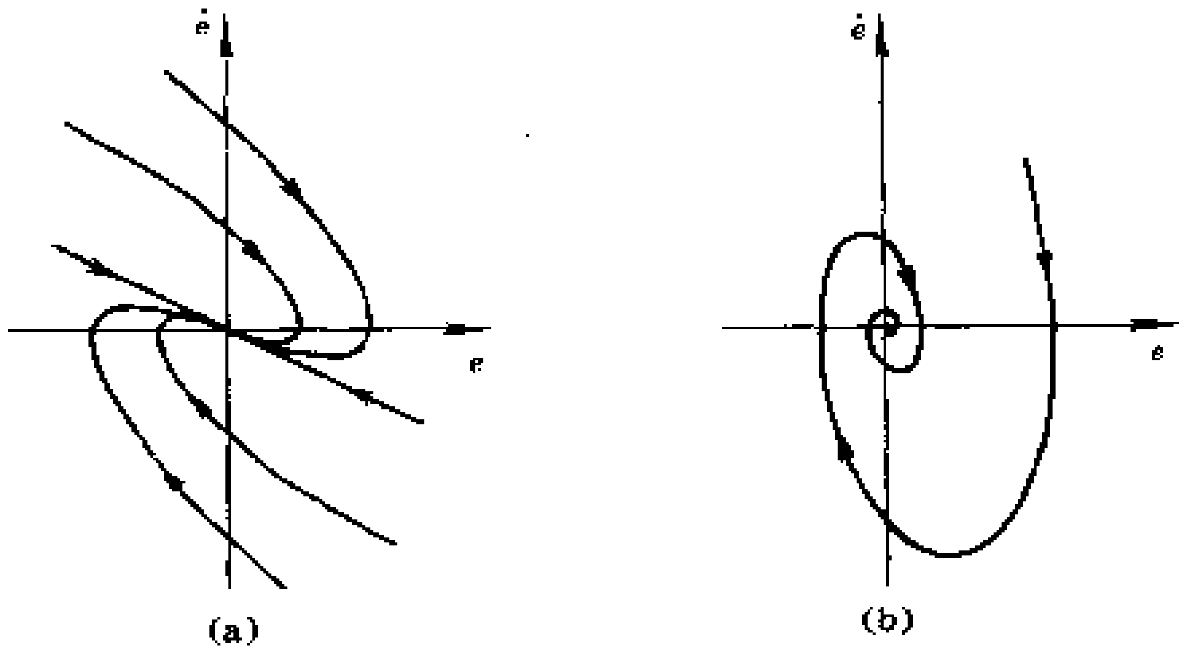


图 3-6 线性系统的相平面图

(a)过阻尼情况($m=ke$) (b)欠阻尼情况($m=e$)

图3-5(a)所示系统的偏差信号的相轨迹,表示在图3-7上,其中系统常数为$T=1,K=4,k=0.0625$和$e_0=0.2$。系统的输入量

假定为单位阶跃量。如同图 3-7 所示，相平面被分成三个区域。在直线 $e=e_0$ 和 $e=-e_0$ 限定的范围内，是方程(3.13)表示的线性工作范围。在这个区域以外，是与方程(3.12)相应的线性工作范围。在图 3-7 中，相轨迹起于 A 点，该点由初始条件 $e(0)=1$，$\dot{e}(0)=0$ 确定，而相轨迹趋于收敛到稳定焦点(0,0)。然而系统的工作状态在 B 点发生转换，该点正是相轨迹与边界线 $e=e_0$ 的交点。在这一点上，相轨迹与属于相邻区域奇点的并通过该点的相轨迹联接。从 B 点开始，一直到系统的工作状态再发生转换之前，相轨迹将趋于收敛到稳定节点(0,0)。在 C 点上，系统的工作状态又发生转换，这时相轨迹将趋于收敛到稳定焦点(0,0)，直到达到 D 点时为止。在 D 点上，系统的工作状态又转换一次。重复上述过程，最后，相轨迹将收敛到稳定节点(0,0)。在稳态时，系统不存在偏差。

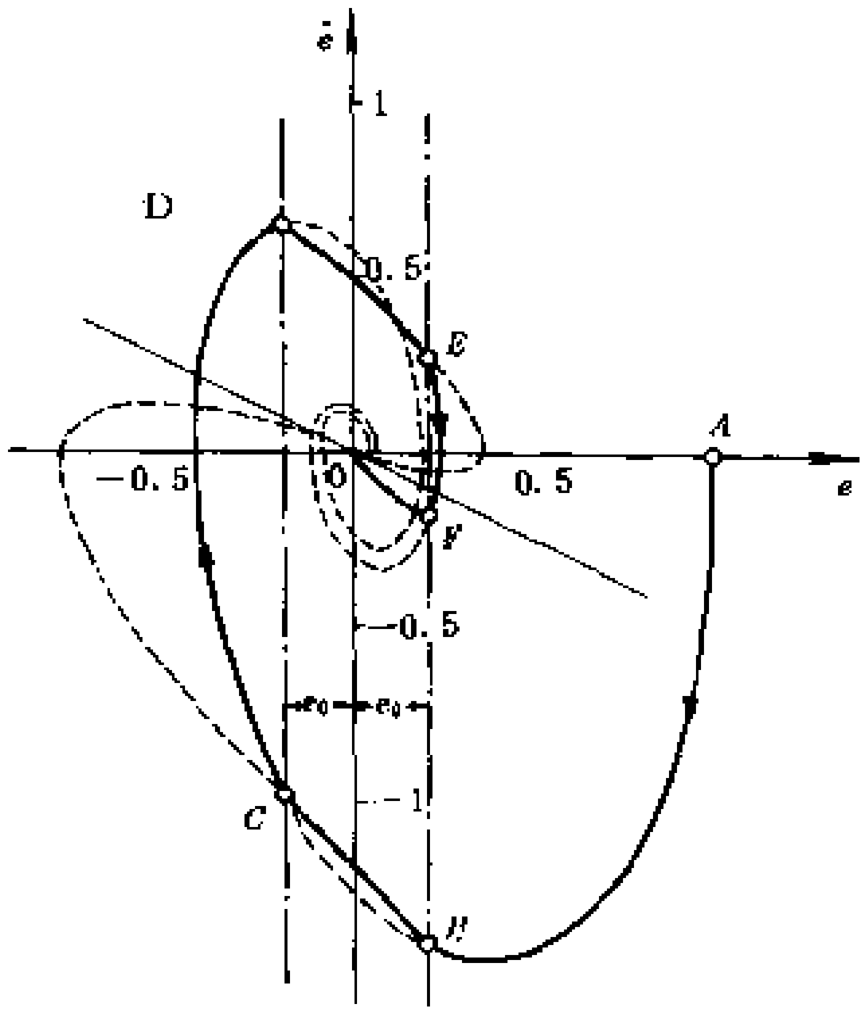


图 3-7　单位阶跃响应相应的相轨迹

可以看出，一般来说，图 3-7 上的相轨迹比图 3-6(a)和(b)所示的相轨迹，具有更合适的阶跃响应特性，因为从响应的快速性意义上说，前者较后者快。对于小的阶跃输入信号，响应是无过调的。对于中等大小的阶跃输入信号，系统的响应具有单一的过调。对于大的阶跃输入信号，在系统的响应曲线中可能同时具有过调和反

向过调。图 3-8 表示了典型的阶跃响应曲线。

对斜坡输入信号(或斜坡一加一阶跃输入信号)

$$u(t) = R + Vt$$

方程(3.10)变成为

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = V \quad (当\ t > 0\ 时) \tag{3.14}$$

当 $t>0$ 时,由方程(3.8),(3.9)和(3.14),我们可以得到

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = V \quad (|e| > e_0) \tag{3.15}$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Kke = V \quad (|e| < e_0) \tag{3.16}$$

与方程(3.15)相应的奇点是$(V/K,0)$,假设它是稳定焦点;而与方程(3.16)相应的奇点是$(V/Kk,0)$,假设它是稳定节点。

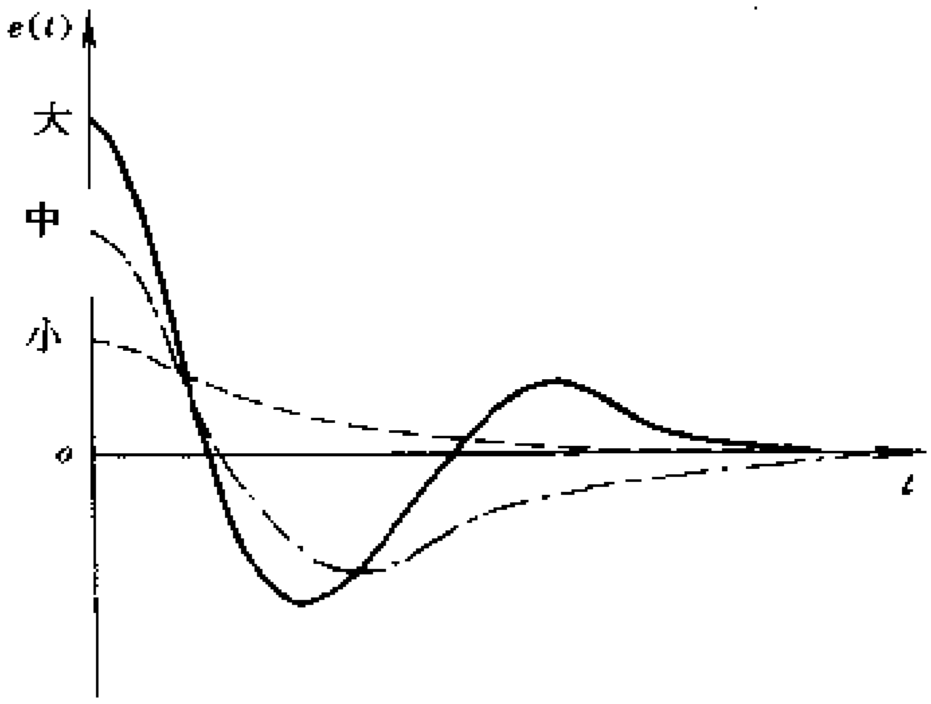
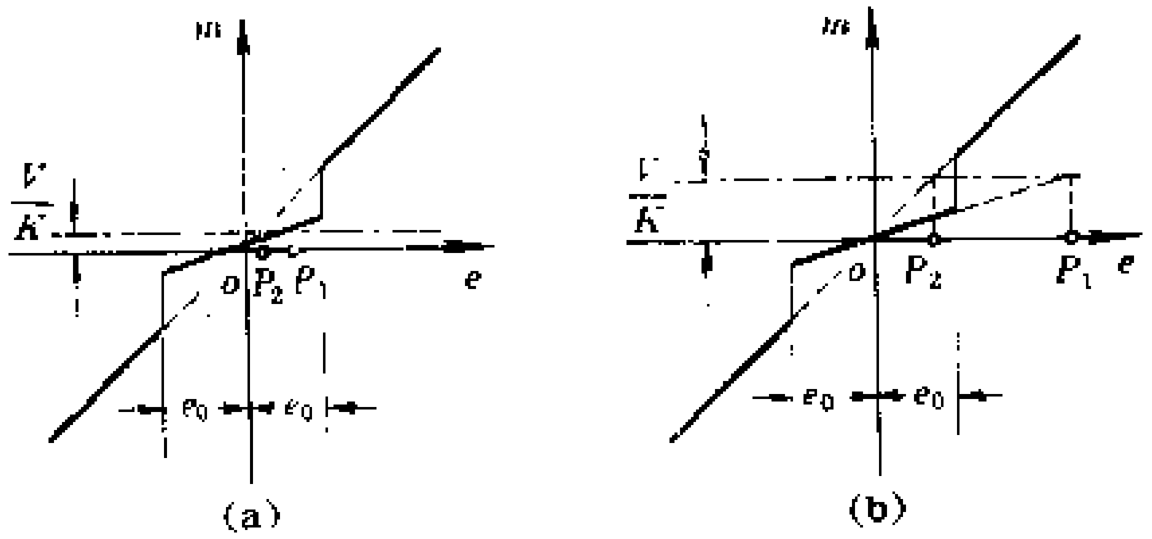


图 3-8　图 3-5(a)所示系统的典型阶跃响应曲线

奇点的位置还可以通过图解法得到。水平线 $m=V/K$ 与直线 $m=ke$ 和直线 $m=e$ 相交。与该交点相应的 e 值,就是奇点的 e 值。图 3-9(a),(b)和(c),表示了这些交点。对于小的 V 值,即当 $|V|<kKe_0$ 时,奇点位于 $e-\dot{e}$ 平面中由直线 $e=\pm e_0$ 限定的长条带以内。对于中等的 V 值,即当 $kKe_0<|V|<Ke_0$ 时,与方程(3.15)相应的奇点位于 $e-\dot{e}$ 平面中由直线 $e=\pm e_0$ 限定的长条带以内,而与方程(3.16)相应的另一个奇点,则位于这一长条带以外。对于大的 V 值,即当 $|V|>Ke_0$ 时,奇点位于这一长条带以外。

如果 m 和 e 之间的关系,在整个响应时间内都是 $m=ke$,则系



统在输入信号 $u(t)=R+Vt$ 作用下的相平面图，与图 3-6(a)所示的相平面图比较，除了前者的图形向右移动了量值 V/Kk 以外，其它完全相同，如图 3-10(a)所示。同样，如果在整个响应时间内，m 等于 e，则相平面图·图 3-10(b)与图 3-6(b)所示的相平面图比较，除了前者向右移动了量值 V/K 以外，其它也完全相同。

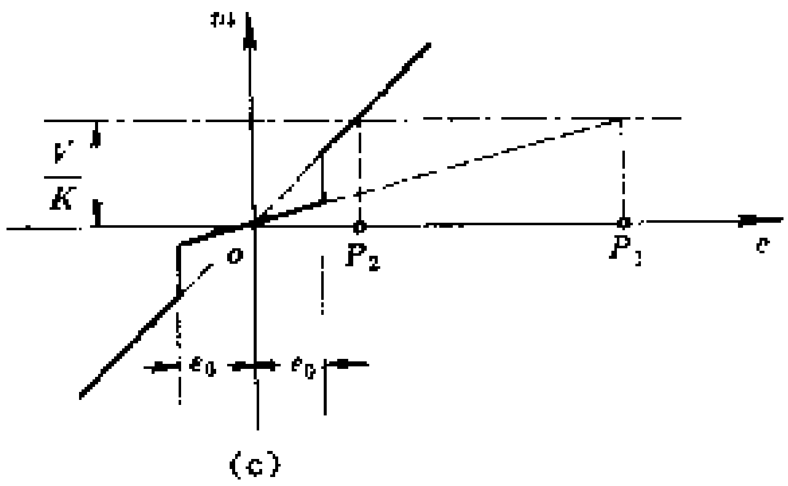


图 3-9 奇点位置图示

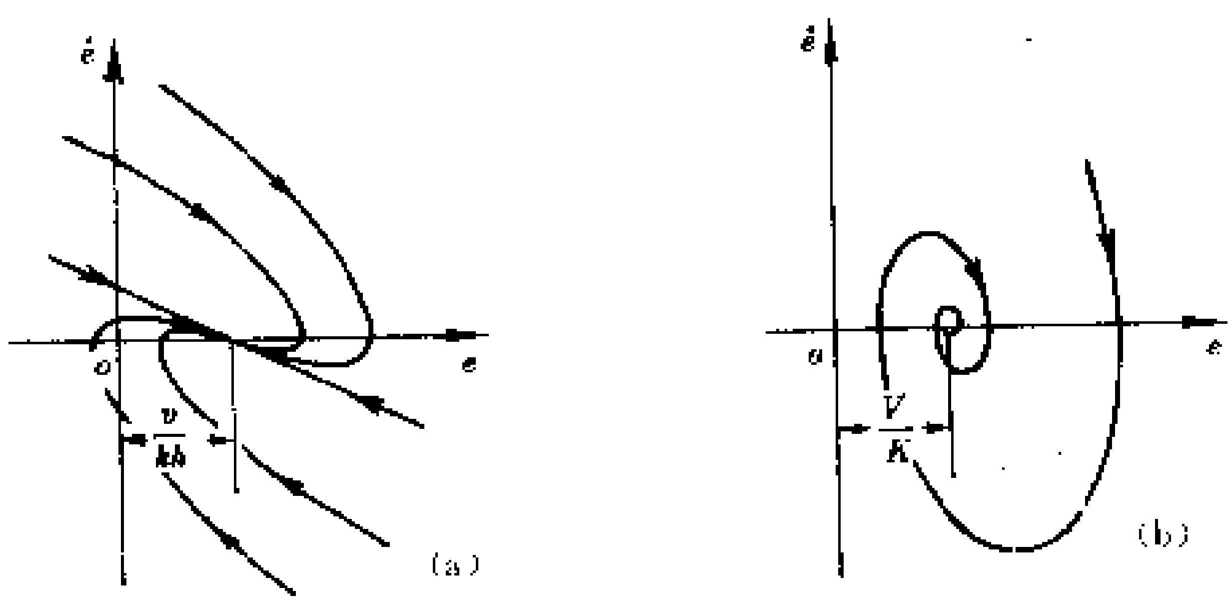


图 3-10 具有斜坡输入量的线性系统的相平面图

(a)过阻尼情况($m=ke$)；(b)欠阻尼情况($m=e$)

图 3-11 表示了当 $V < kKe_0$ 时，偏差信号的相轨迹。(在这一例子中采用的数值是 $T=1, K=4, k=0.0625, e_0=0.2, R=0.3$ 和 $V=0.04$。) 相轨迹的起点 A，由初始条件 $e(0)=R=0.3$ 和 $\dot{e}(0)=V=0.04$ 确定。起于 A 点的相轨迹，趋于收敛到稳定焦点 P_2。但是，一旦相轨迹到达 B 点，系统的工作状态便发生转换，从而使相轨迹开始向稳定节点 P_1 收敛。稳态时系统有偏差，其大小为 $\overline{OP_1}$。

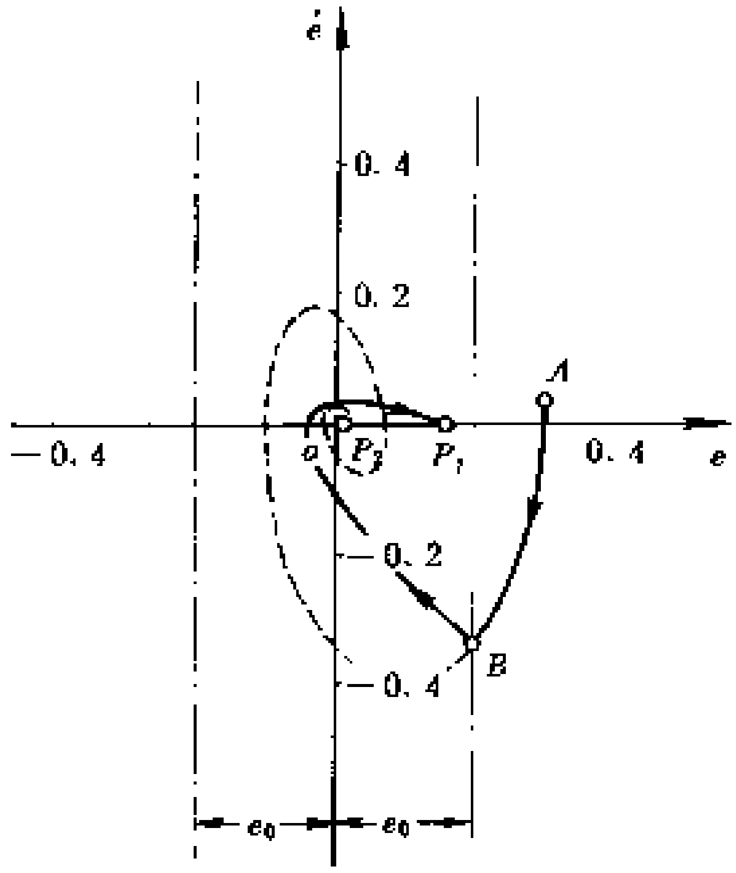


图 3-11 斜坡响应对应的相轨迹

图 3-12 表示了当 $kKe_0 < V < Ke_0$ 时，偏差信号的相轨迹。(在图 3-12 中，系统参数为 $T=1, K=4, k=0.0625$ 和 $e_0=0.2$。输入量 $u(t)=Vt=0.4t$。) 相轨迹起于 A 点。该点相应于初始条件 $e(0)=0$，$\dot{e}(0)=0.4$，这一段相轨迹趋于收敛到稳定节点 $P_1(1.6,0)$。系统工作状态的转换发生在 B 点，自 B 点开始，相轨迹将趋于收敛到稳定焦点 $P_2(0.1,0)$。但是，在 C 点上系统的工作状态又发生转换，此后相轨迹又

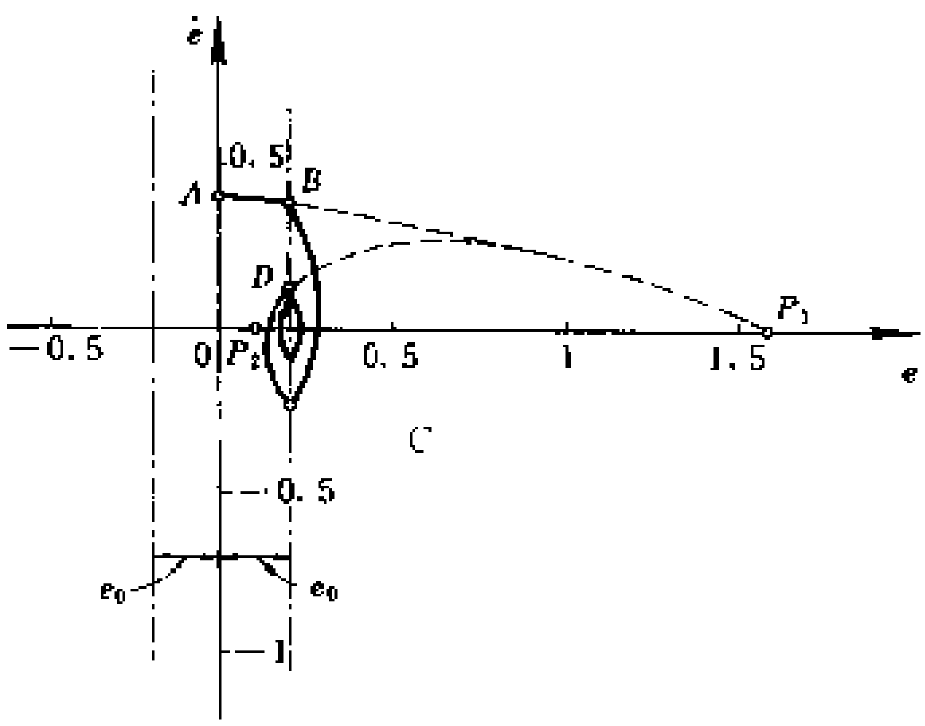


图 3-12 斜坡响应对应的相轨迹

趋向收敛到稳定节点 P_1。在 D 点上，系统的工作状态再一次改变。重复进行上述过程，直到相轨迹收敛到 $e=e_0$ 和 $\dot{e}=0$ 那一点为止。从图可以看出，当相轨迹趋于奇点 $(e_0,0)$ 时，偏差信号表现出较小的振荡特性，而稳态偏差的大小则变成 e_0。

系统的稳定工作状态，取决于非线性放大元件的物理性质。如果从一种线性工作状态转换到另一种线性工作状态，包含着一些延迟，则系统的响应将表现为围绕着点 $(e_0,0)$ 的极限环。如果上述转换过程是瞬时发生的，则稳态时，系统将表现出所谓的"抖动"现象。

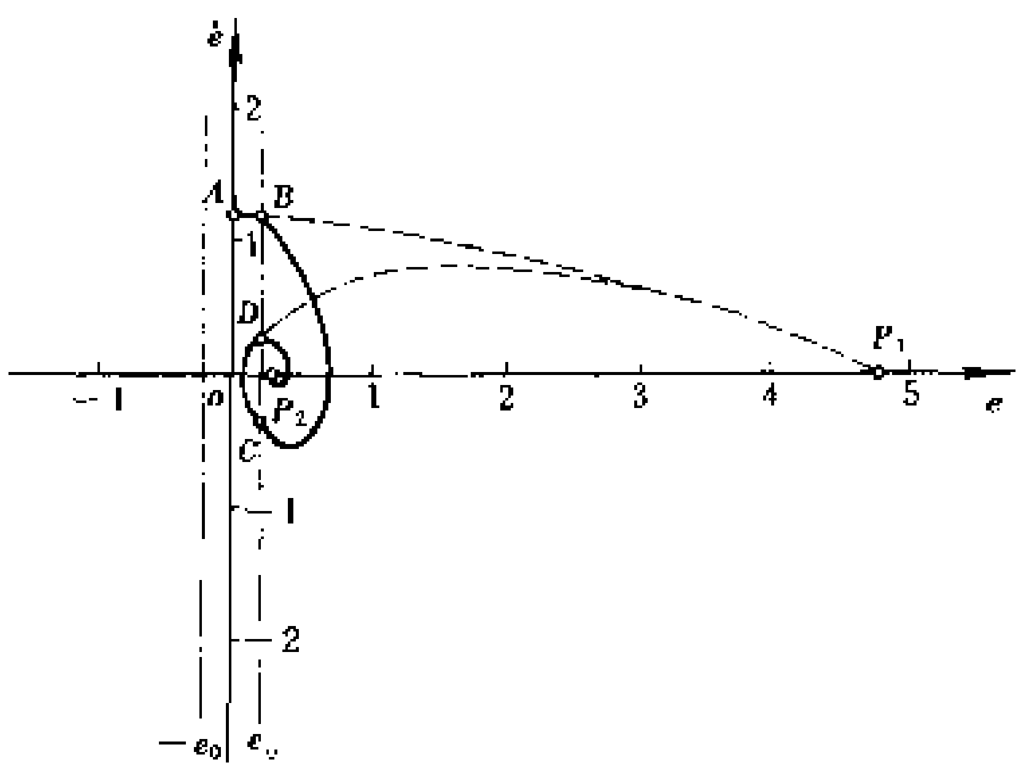


图 3-13　与图 3-5(a)所示系统的斜坡响应对应的相轨迹

图 3-13 表示了 $V>Ke_0$ 情况下的偏差信号的相轨迹。[输入量为 $u(t)=Vt=1.2t$。] 相轨迹起始于与初始条件相应的 A 点，而趋于收敛到稳定焦点 $P_1(4.8,0)$。但是，系统的工作状态在 B 点要转换，使相轨迹收敛于稳定焦点 $P_2(0.3,0)$。系统的工作状态在 C 点，而后在 D 点，还要发生转换，但是相轨迹最终将收敛于稳定焦点 P_2。当相轨迹趋近于 P_2 点附近时，偏差信号表现出小的振荡，最后，振荡完全停止下来。稳态时，偏差的大小等于 $\overline{OP_2}$。

上述分析表明，非线性系统的响应形式取决于输入量。例如，对于小阶跃输入量，响应没有过调；对于大阶跃输入量，响应具有

振荡特性。对于小幅度的斜坡输入量，响应是非周期的；而对于大幅度的斜坡输入量，响应则具有振荡特性。

〔例 2〕设系统如图 3-14(a)所示。非线性元件的输入—输出特性曲线，如图 3-14(b)所示。假设从一种状态结束到另一种状态开始的转换过程中，没有时间延迟。试确定系统的阶跃响应过程和斜坡响应过程。假设系统的参数为 $T=1$，$K=4$，$e_0=0.1$，$e_1=0.2$ 和 $M_0=0.2$。

该系统的方程为

$$T\ddot{e}+\dot{e}+Km=T\ddot{u}+\dot{u} \tag{3.17}$$

当 $\dot{e}>0$ 时，我们有

$$\begin{cases} m=M_0 & (e>e_1) \\ m=0 & (e_1>e>-e_0) \\ m=-M_0 & (e<-e_0) \end{cases} \tag{3.18}$$

当 $\dot{e}<0$ 时，我们有

$$\begin{cases} m=M_0 & (e>e_0) \\ m=0 & (e_0>e>-e_1) \\ m=-M_0 & (e<-e_1) \end{cases} \tag{3.19}$$

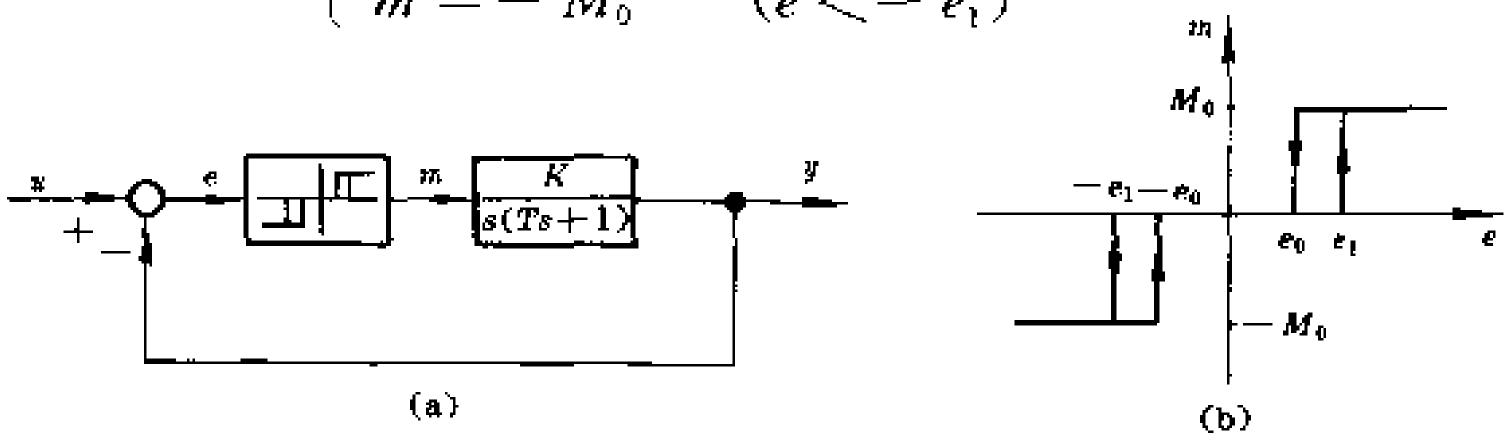


图 3-14 (a)非线性控制系统；(b)非线性元件的输入—输出特性曲线

在以 e 和 $\dot{e}$ 构成的相平面上，根据式(3.18)，平行于 $\dot{e}$ 轴的两条半直线 $e=-e_0$ 和 $e=e_1$ 把上半平面分成三部分；而由式(3.19)，半直线 $e=-e_1$ 和 $e=e_0$ 把下半平面分成三个区域。这样整个相平面被分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三个区域，如图 3-15 所示。每个区域的相轨迹服

从一个线性微分方程。对于单位阶跃输入情形，由于 $\ddot{u}=\dot{u}=0$，式(3.17)变为

$$T\ddot{e}+\dot{e}+Km=0 \quad (3.20)$$

对应于区域Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ，m 分别取 $-M_0$，0 和 $+M_0$，方程(3.20)可分别写成

$$\begin{cases} T\ddot{e}+\dot{e}-KM_0=0 & (\text{区域Ⅰ}) \\ T\ddot{e}+\dot{e}=0 & (\text{区域Ⅱ}) \\ T\ddot{e}+\dot{e}+KM_0=0 & (\text{区域Ⅲ}) \end{cases} \quad (3.20a)$$

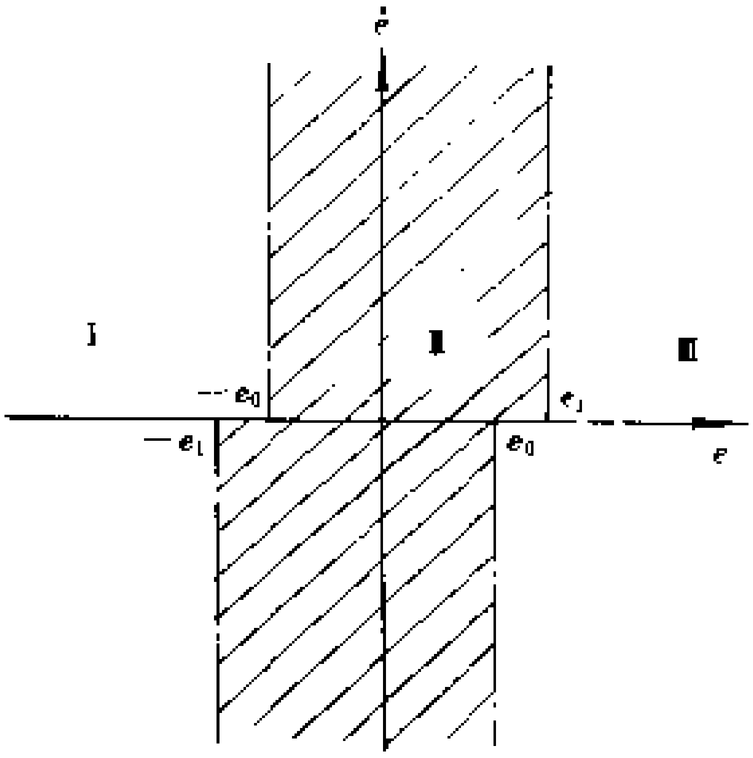


图 3-15

设 $x_1=e$，$x_2=\dot{e}$，式(3.20)对应的状态方程可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{T}x_2-\dfrac{Km}{T} \end{cases} \quad (3.21)$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=-\frac{x_2+Km}{Tx_2} \quad (3.22)$$

对于区域Ⅱ，$m=0$，有

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=-\frac{1}{T} \quad (3.23)$$

这表明相轨迹斜率恒定的直线族。由题设 $T=1$，这族直线的斜率为 -1。

对于区域Ⅰ和Ⅲ，由于 $m\neq 0$，方程(3.21)的解可以写成

$$\begin{cases} x_2=\dot{e}=c_1e^{-t/T}-Km \\ x_1=e=-c_1Te^{-t/T}-Kmt+c_2 \end{cases} \quad (3.24)$$

假定初值 $e(0)=1$，$\dot{e}(0)=0$，并考虑 $T=1$，上式可变为

$$\begin{cases} e = -Km(e^{-t}+t)+Km+1 \\ \dot{e} = Km(e^{-t}-1) \end{cases} \tag{3.25}$$

当 $t\to\infty$，有 $\dot{e}\to -Km$。这表明

$$\dot{e} = -Km \tag{3.26}$$

是系统相轨迹的渐近线。对于区域Ⅰ：$m=-M_0<0$，渐近线为 $\dot{e}=KM_0=0.8$；对于区域Ⅱ：$m=M_0>0$，渐近线为 $\dot{e}=-KM_0=-0.8$。

当系统从 A 点($e=1$，$\dot{e}=0$)出发的相轨迹示于图 3-16。根据式(3.25)，相轨迹在区域Ⅲ一段是一条以 $\dot{e}=-0.8$ 为渐近线的曲线，并和区域Ⅰ和Ⅲ的边界线 $e=e_0$ 交于 B 点。然后根据方程(3.23)，相轨迹在区域Ⅰ沿直结 $\dot{e}=-e$ 达到边界线上的 C 点。接着在区域Ⅰ沿着以 $\dot{e}=+0.8$ 为渐近线的曲线到达 D，进而又通过区域Ⅱ到达 E 点。相轨迹逐渐逼近一条闭合曲线。这就是通常所说的极限环。系统处于持续的振荡过程。

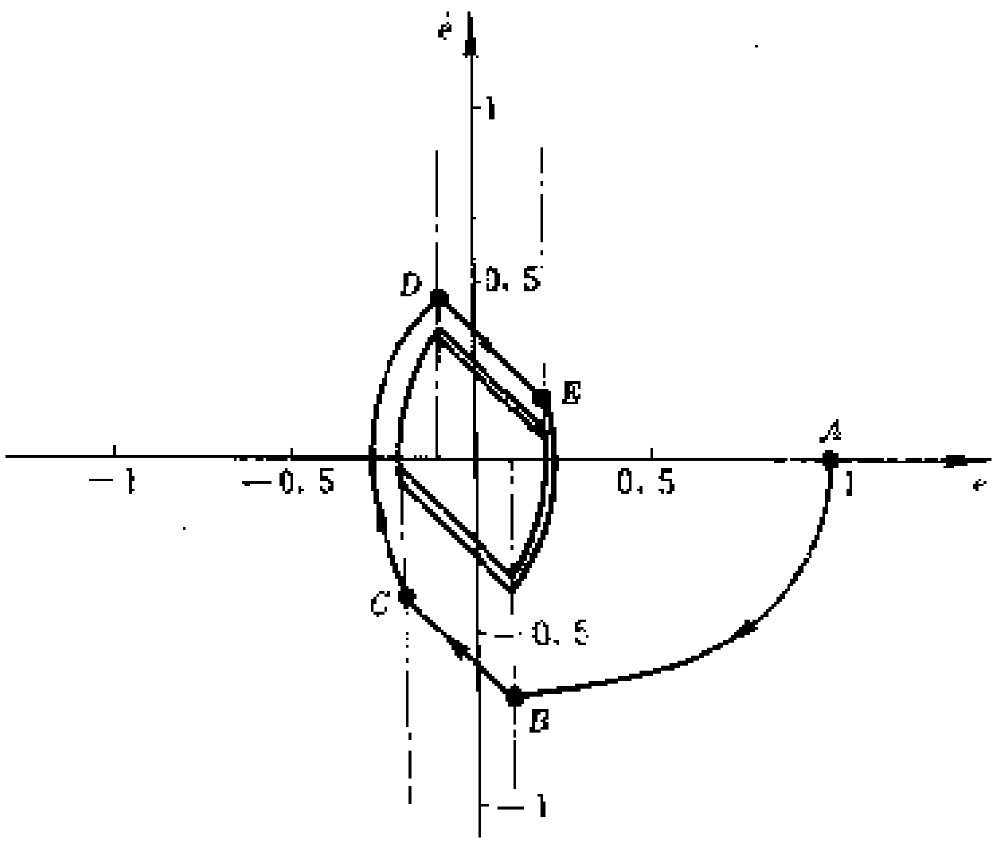


图 3-16　单位阶跃响应对应的相轨迹

对于斜坡输入，$u=Vt$，依据 V 的大小有三种不同结果：(1)$V<KM_0$，系统收敛于一个极限环。(2)$V=KM_0$，系统收敛于 e 轴的正半轴上的一点。具体位置和初值有关。(3)$V>KM_0$，相轨迹在接近渐近线过程中趋 $e=\infty$。详细分析留给读者自行讨论。

三、相轨迹的作图法

一般的非线性微分方程，直接求出解析解是非常困难的。常常求助于作图法。

1. **等倾线法** 假定状态方程可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = q(x_1, x_2) \end{cases} \tag{3.27}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{q(x_1, x_2)}{p(x_1, x_2)} \tag{3.28}$$

可以想象在相轨迹斜率相等的各点的连线上，有

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \alpha = \text{常数} \tag{3.29}$$

代入式(3.28)，得

$$q(x_1, x_2) = \alpha p(x_1, x_2) \tag{3.30}$$

这是等斜率曲线，即等倾线，所应满足的方程。变更 α 的数值，可以求出等倾线族分布在整个相平面上。于是根据 α 的大小可以在整个相平面上画出相轨迹切线的方向场。如同已知电场方向求电力线一样，只要给出初值就可作出相轨迹。

作为例子，应用等倾线法来画范德波方程的相轨迹。根据方程(1.4)，有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f\cdot(x_1^2-1)x_2 - kx_1 \end{cases} \tag{3.31}$$

其等倾线方程为

$$-f\cdot(x_1^2-1) - \frac{kx_1}{x_2} = \alpha \tag{3.32}$$

设 $k=1, f=0.2$，上式可变为

$$x_2=\frac{x_1}{0.2(1-x_1^2)-\alpha} \tag{3.33}$$

对于 $\alpha=0$，上式变为 $x_2=x_1/0.2(1-x_1^2)$。当式(3.31)的相轨迹与上式所表示的曲线相交时，相轨迹在这个交点附近的斜率就为零。对于 $\alpha=-1$，有 $x_2=x_1/(1.2-0.2x_1^2)$，这时，相轨迹与上式所示曲线相交处的斜率就是−1。这样反复地做下去，就可作出图3-17所示的斜率的分布场。实际画一根相轨迹时，先定下初始状态的点，再把具有各种斜率的折线顺序连接起来，即可作近似的相轨迹图。

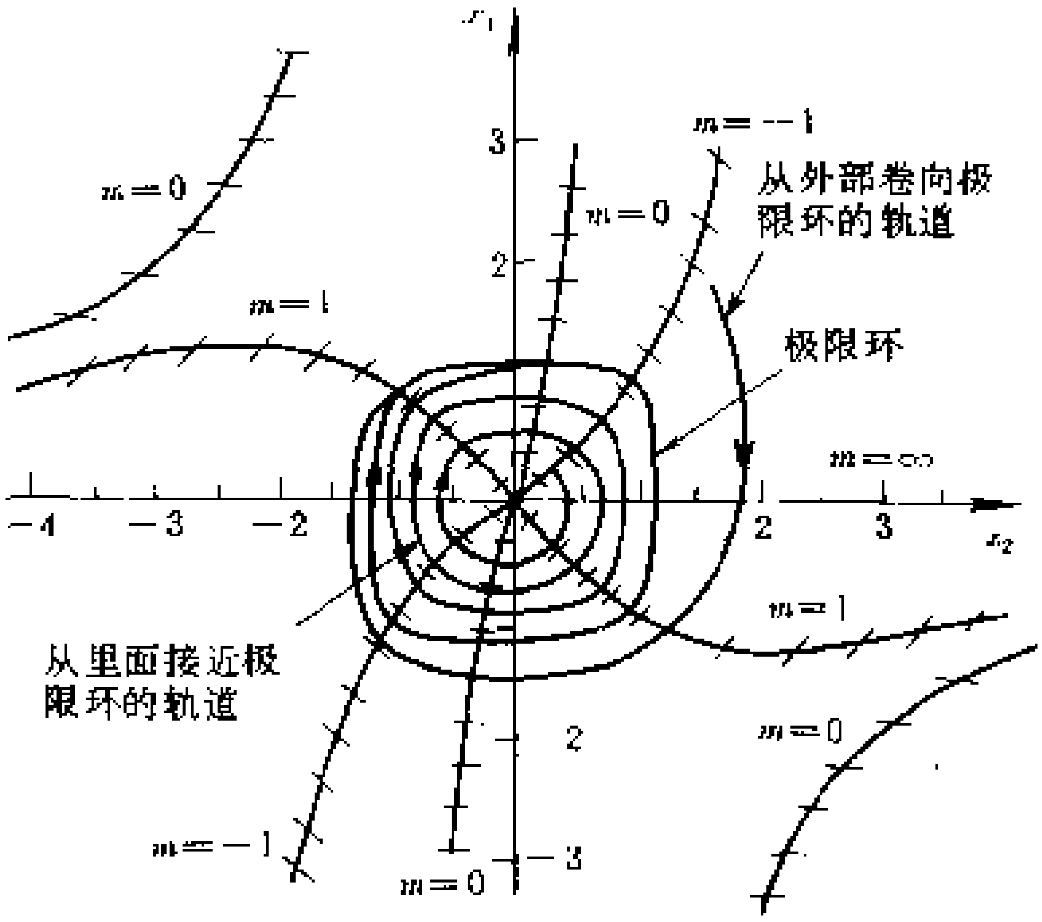


图 3-17　等倾线法

2. Lienard 法　这个方法适用于画以下形式所示状态方程的相轨迹：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=f(x_1,x_2)\end{cases} \tag{3.34}$$

在上式第二式右边，加上 $\omega_0^2x_1$ 再减去它，就可化为下式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - \delta(x_1, x_2) \end{cases} \tag{3.35}$$

式中 $\delta(x_1,x_2) = -f(x_1,x_2) - \omega_0^2 x_1$

现在由式(3.35)可得

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\omega_0^2 x_1 + \delta(x_1,x_2)}{x_2} \tag{3.36}$$

在点(x_1,x_2)附近把$\delta(x_1,x_2)$看成常数，对上式进行积分，可得其解为

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x_1^2}{2} + \delta(x_1,x_2)x_1 = \text{常数} \tag{3.37}$$

把上式改写成

$$x_2^2 + \left(\omega_0 x_1 + \frac{\delta(x_1,x_2)}{\omega_0}\right)^2 = R^2 \tag{3.38}$$

上式说明了，如果选取新坐标系为$(\omega_0 x_1, x_2)$，则在新坐标系中，以圆心为$(-\delta/\omega_0, 0)$，半径为圆心到所取点$(\omega_0 x'_1, x'_2)$的距离，所作的圆弧就近似地表示了所选取点附近的相轨迹。因此，相轨迹就可用一族小圆弧来连接而成。在图 3-18 上，表示了用这种方法作相轨迹的过程。

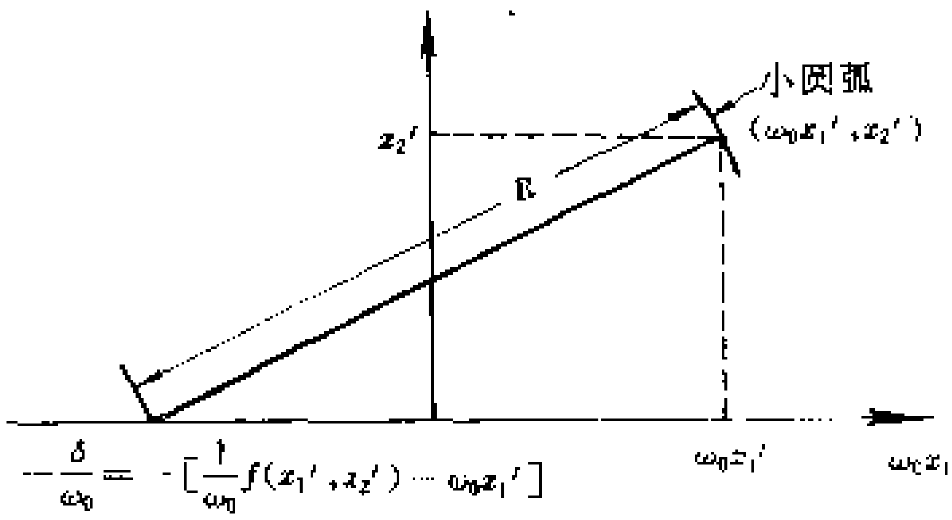


图 3-18 Lienard 法

3. **时间关系** 相轨迹给出了状态变量之间的相互关系，但是缺少时间的信息。为了了解系统状态的时间过程，下面讨论从相轨迹计算时间的方法，并假定二阶系统的动力学方程可表示为$\ddot{x} = f(x,\dot{x})$。

方法 1　积分下面的量即可算出时间：

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{1}{\dot{x}} \mathrm{d}x = t_1 - t_0 \qquad (3.39)$$

上式在几何上可用图 3-19 上画阴影部分的面积表示。

方法 2　积分下面的量可计算出时间：

$$\int_{\dot{x}(t_0)}^{\dot{x}(t_1)} \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{f(x,\dot{x})} = \int_{\dot{x}(t_0)}^{\dot{x}(t_1)} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\dot{x}} \mathrm{d}\dot{x} = t_1 - t_0 \qquad (3.40)$$

上式在几何上表示图 3-20 上画阴影部分的面积。

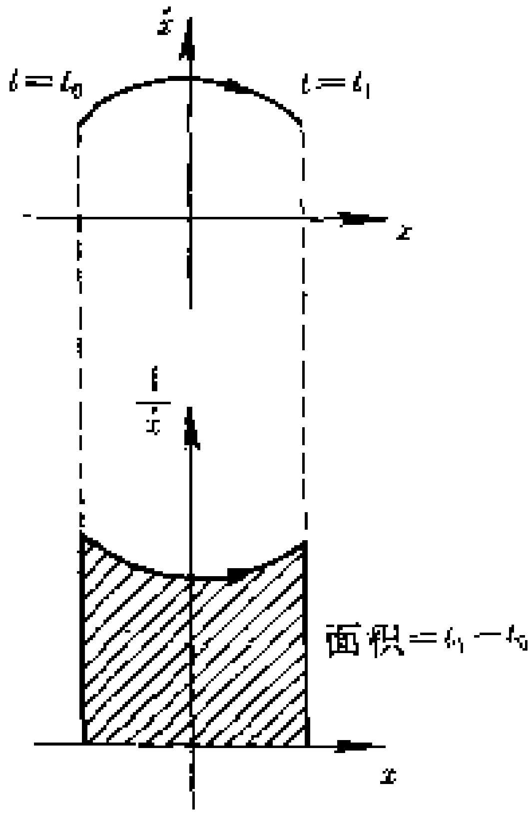


图 3-19　由相迹计算时间的方法(1)

方法 3　根据 Lienard 法计算时间。在图 3-21 上，圆心为$(-\delta/\omega_0, 0)$的小圆弧可用下面的微分方程式表示

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \delta = 0 \qquad (3.41)$$

因为圆心角为 θ 的一段圆弧可近似地用 $\omega_0 t$ 来求出，所以通过 θ 所需的时间为 $t_\theta = \theta/\omega_0$。

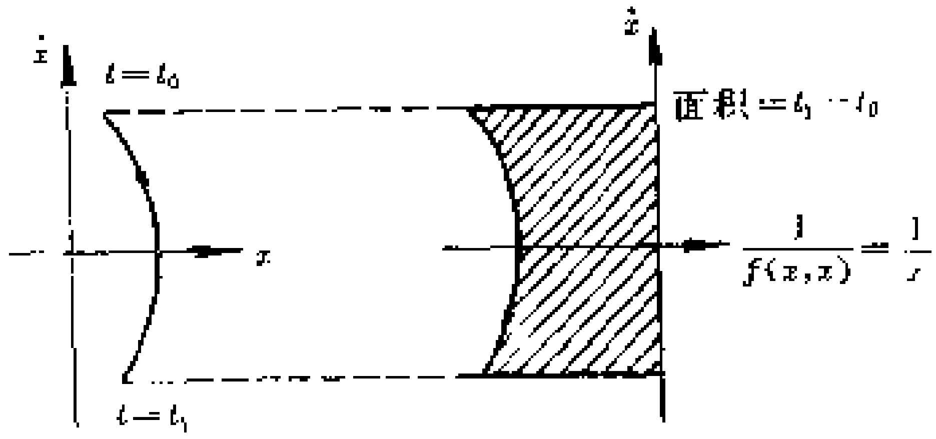


图 3-20　由相迹计算时间方法(2)

把相迹用 m 个圆心角为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ 的圆弧来分割时，通过整个相迹的时间为$\sum_{i=1}^{m} \theta_i/\omega_0$。

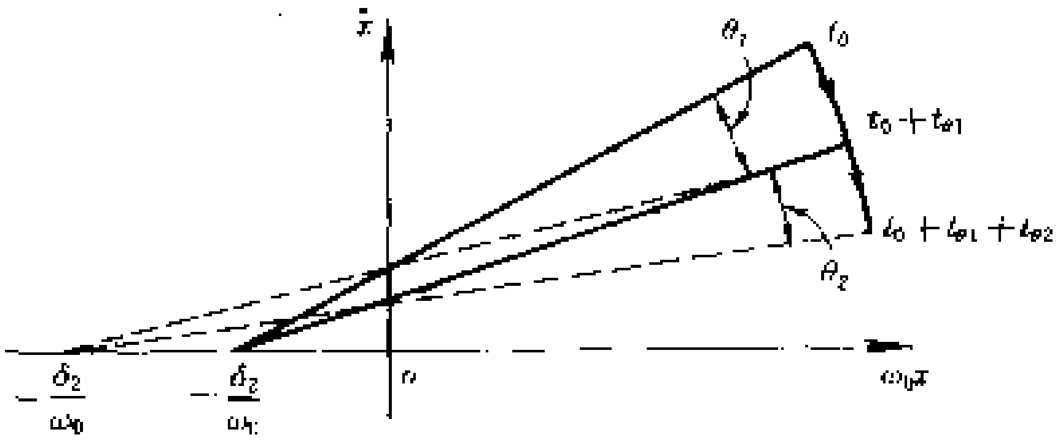


图 3-21 计算通过小圆弧的时间

§4 李亚普诺夫稳定性理论

拉格朗日(Lagrange)首先用能量作为判据讨论了力学系统的稳定性。李亚普诺夫(Lyapunov)作了进一步推广。建立了一般动力学系统的稳定性理论。这个理论在非线性控制系统中得到了广泛的应用。

一、拉格朗日定理

我们曾经指出,控制系统的稳定性理论是力学系统稳定性理论的一种延伸。因此,在讨论非线系统稳定性的时候,首先回顾这个问题在力学中的表述。

1. **平衡位置和平衡状态** 一个力学系统,如果初始时刻的速度为零而处于某一位置,并且以后永远停留在该位置上,则这个位置称为**平衡位置**。很明显,在平衡位置,系统的合力为零。

在平衡位置上保持速度为零的状态称**平衡状态**。平衡状态在力学上就是静止状态。

一个力学系统常常可以看成是由质点构成的。只当每个质点都处于平衡状态时,整个力学系统才处于平衡。一个质点在一维坐标系的牛顿动力学方程可以写成

$$m\ddot{x} = f \tag{4.1}$$

设 $x_1=x, x_2=\dot{x}$，则上式可改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f/m \end{cases} \tag{4.2}$$

这是质点运动的状态方程。如果质点处于平衡状态：$\dot{x}_1=0, f=0$，于是方程(4.2)两式的右边都为零，

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ f/m = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

这样，我们可以把平衡状态的概念推广到一般控制系统。由于一般控制系统的状态方程可写为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \tag{4.4}$$

我们定义满足方程

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e,t) = 0 \tag{4.5}$$

的状态 $\boldsymbol{x}_e$ 为控制系统的平衡状态。注意到由于方程(4.5)，对于平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 有

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_j} = \frac{\dot{x}_i}{\dot{x}_j} = \frac{f_i(\boldsymbol{x}_e,t)}{f_j(\boldsymbol{x}_e,t)} = \frac{0}{0} \qquad (\text{不定})$$

$$(i,j=1,\cdots,n,i\neq j)$$

所以，系统的平衡状态也是状态空间的奇点。

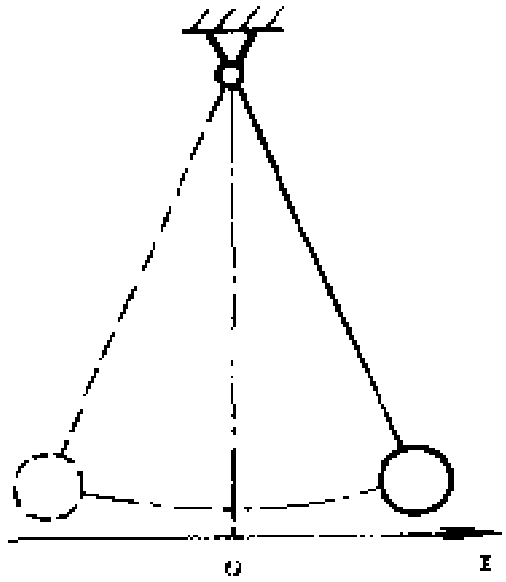
2. **平衡的稳定性** 在讨论线性控制系统稳定性时，曾经提到：对于一个处于平衡的力学系统，如果受到外界的一个扰动（微小而短促的作用力），在扰动撤离之后能够回到平衡位置，这样的平衡称为稳定平衡。这是静力学对平衡稳定性的定义。

下面从动力学和状态空间角度说明对平衡稳定性的描述。

比如一个单摆，铅垂线是它的平衡位置，一开始摆球位于铅垂线上而保持静止。如果这时外界对摆球施加一微小扰动而使摆球偏离平衡位置，那么在重力作用下摆球将回到平衡位置。力学上认为这样的平衡位置是稳定的。

在图 4-1 中，我们用位置 x，速度 $\dot{x}$ 来描写单摆的状态变量。

设 $x=0$ 处为平衡位置，那么状态平面的原点就是系统的平衡状态。假如初始时刻 $t=t_0$，位置的偏离为 $x(t_0)=x_0$，初速 $\dot{x}(t_0)=0$，随着 t 的增加，摆球向平衡位置运动。$\dot{x}$ 随 x 减小而减小（$\dot{x}$ 的绝对值增加但沿 x 轴的负方向）。到达 $x=0$ 处，$\dot{x}$ 达到极小值。随后 $\dot{x}$ 的数值开始减小，其代数量增加一直到达 $x=-x_0$ 处 $\dot{x}=0$，然后返回运动。其状态轨迹如图 4-1(b)所示，是一个椭圆。只要初始状态偏离平衡状态足够小，就能使整个状态轨迹处于平衡状态附近任意给定的范围之内。人们认为具有这一特点的平衡状态是稳定的。为陈述方便假定平衡状态 x_e 位于原点。



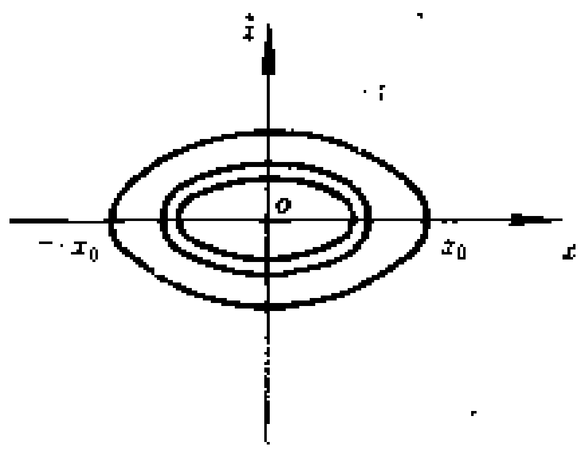


图 4-1 单摆和它的等能曲线

定义 1： 如果处于状态空间原点的平衡状态是稳定的，那么在它附近任意给定 $\varepsilon>0$，总能找到 $\delta>0$，只要

$$|\boldsymbol{x}(t_0)|<\delta \tag{4.6}$$

就有

$$|\boldsymbol{x}(t)|<\varepsilon \tag{4.7}$$

对于一切 $t\geqslant t_0$ 成立。

在 n 维状态空间，$|\boldsymbol{x}|=\varepsilon$（或 $|\boldsymbol{x}|=\delta$）是一个 n 维空间的超球面。由 ε 或 δ 所限定的空间称为球域，通常记作 $S(\varepsilon)$ 或 $S(\delta)$。

3. **拉格朗日定理** 早在 1644 年，托里拆利就知道，不需要具体求出状态轨迹就能确定：在重力场中，当物体的重心处于可能的最低位置时，平衡是稳定的。1788 年拉格朗日把它推广到保守系

统中。

定理：如果某一位置，保守系统的势能具有极小值，则此位置是系统的稳定平衡位置。相应的平衡状态也是稳定的。

为了便于应用到控制系统，我们着重证明平衡状态的稳定性。

不失一般性取坐标原点位于势能的极小值位置，并取极小值的势能 $V=0$。另一方面，系统的动能总可写成 $T=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$。即使有约束存在，动能也总可表示为广义速度的正定二次型。因此，在速度为零处，动能具有极小值，并且一定有 $T=0$。

如果取坐标和速度（有约束时取广义坐标和广义速度）为状态变量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，并取状态空间的原点为系统的平衡状态，那么系统的总能量 $E=T+V$ 在状态空间原点 $\boldsymbol{x}=0$ 处取得极小值。这意味着：

(1)在 $\boldsymbol{x}=0$ 处，$E=0$；

(2)在 $\boldsymbol{x}=0$ 以外的某个 Δ 球域 $S(\Delta)$ 内，$E>0$；

(3)注意到 E 在状态空间的连续性，在 $S(\Delta)$ 球域内总能量 E 随着与原点"距离"（严格地应称为"范数"）而单调增加。这就是说，总能量 E 的等值面在 $S(\Delta)$ 球域内是一层套一层的，并且由里向外，总能量数值递增。

下面来证明拉格朗日定理。

任意取 $0<\varepsilon<\Delta$，那么在不等式

$$|\boldsymbol{x}|<\varepsilon \tag{4.8}$$

所限定的球域 $S(\varepsilon)$ 的边界上，总能量 E 存在极小值。这是因为这个边界是一个闭的点集，并且 E 在其上连续。设这个极小值为 E^*，如图 4-2。注意到总能量 E 是由里向外递增的，如果取 $E=E^*$ 的等能面离状态空间原点的最近距离为 δ，那么只要 $|\boldsymbol{x}|<\delta$ 就有

$$E \lessgtr E^* \tag{4.9}$$

如果初始状态 $|x(t_0)|<\delta$，则其初始能量

$$E_0 < E^* \tag{4.10}$$

由于保守系统能量守恒，对于一切 $t > t_0$，$E = E_0$ 于是系统状态轨迹总在 $S(\varepsilon)$ 球域之内。或

$$|x(t)| < \varepsilon \tag{4.11}$$

根据定义 1，系统的平衡状态稳定。

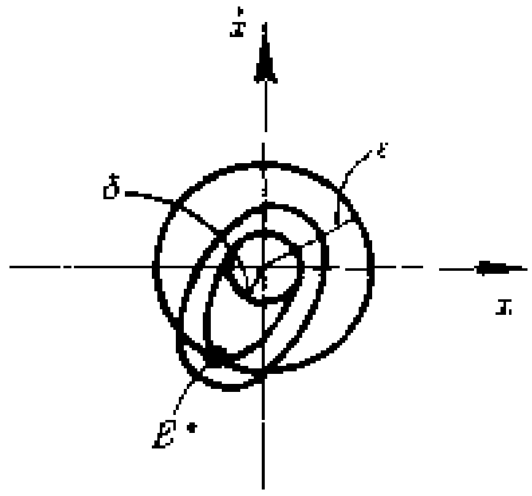


图 4-2 球域

4. **耗散系统的稳定性** 上述讨论表明，拉格朗日定理的前题条件可以归结为：

(1)系统有势，总能量 $E=T+V$ 在平衡状态取极小值；

(2)系统是保守的，沿着状态轨迹

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.12}$$

拉格朗日定理给出的是力学系统稳定性的充分条件。

如果系统不是保守的，而是恒定耗散的，只要系统有势，并且总能量 $E=T+V$ 在平衡状态取极小值，系统仍然是稳定的。与保守系统不同的在于条件(4.12)应改为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} < 0 \tag{4.13}$$

在这种情形下，一方面由于 E 在平衡状态取极小值，等能面在平衡状态附近的分布仍然和前面所讨论的情形一样：一层层相套，随着向外扩展，E 值变大。另一方面，对于耗散系统虽然状态轨迹不能保持在初始的等能面上(如同保守系统)，但是总不能超出初始等能面。反而随时间的推移收敛于平衡状态，即我们假定的状态空间原点。或者说，对于恒定耗散系统，当 $t\to\infty$，有 $E\to 0$ 并且 $x(t)\to 0$。这样一种情形显然也是满足定义 1 的，因此是稳定的。但是与保守系统有明显的不同特点。

二、李亚普诺夫定理

1. **渐近稳定性** 由于耗散系统的稳定性表现出与保守系统

稳定性的不同特点，这类稳定性特别称为**渐近稳定性**。严格陈述如下：

定义 2： 对于处于状态空间原点的平衡状态，如果任意给定 $\varepsilon(0<\varepsilon<\Delta)$，就能找到 $\delta>0$，只要 $|\boldsymbol{x}(t_0)|<\delta$，对一切 $t\geqslant t_0$ 总有

$$|\boldsymbol{x}(t)| < \varepsilon \tag{4.14}$$

以及

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) = 0 \tag{4.15}$$

就称状态空间原点的平衡状态在球域 $S(\Delta)$ 是渐近稳定的。

一般地说，δ 的选取依赖于 ε 和 t_0。如果 δ 和初始时刻 t_0 无关，那么满足定义 2 的条件的稳定性进一步称为**一致渐近稳定**。

如果定义 2 中的条件不受球域 $S(\Delta)$ 的限制，而是从状态空间所有点出发的状态轨迹都收敛于平衡状态，则称**系统是大范围(或全局)渐近稳定**。严格地说，由定义 2 所定义的稳定性属于**局域渐近稳定性**。

2. **李亚普诺夫定理** 具有连续导数的总能量 E 在原点取极小值意味着：当 $\boldsymbol{x}=0$，$E=0$；而当 $\boldsymbol{x}\neq 0$，总能够在某个球域 $S(\Delta)$ 内有 $E>0$。满足这两个条件的总能量 E 在数学上称为**正定的**。对于恒定耗散系统，由于 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}<0(\boldsymbol{x}\neq 0)$；$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0(\boldsymbol{x}=0)$，称 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ 为**负定的**。这样对于恒定耗散系统稳定的充分条件也可陈述为：

(1) E 在球域 $S(\Delta)$ 内正定；

(2) $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ 在球域 $S(\Delta)$ 内负定

李亚普诺夫发现，判断一个系统是否稳定，并不限制于应用能量 E。只要能找到一个状态变量的标量函数 $V(\boldsymbol{x},t)$，它在平衡状态附近连续，并于平衡状态处取得极小值，就可以断定该平衡状态是稳定的。因为在这种情况下，函数 V 的等值面族

$$V(\boldsymbol{x},t) = C \tag{4.16}$$

在平衡位置附近总是相套的，并随 C 值的增大等值面离平衡位置

越远，这类似于图 4-1 的单摆的等能面。不难用 $V(x,t)$ 代替 E，根据定义 1 使拉格朗日定理得到证明。

V 函数称为李亚普诺夫函数

如果我们定义的一个正定的标量函数 $V(x)$ 为

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

那么,沿任意轨迹 $V(\boldsymbol{x})$ 对时间的导数

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)^2\end{aligned}$$

是负定的。这说明 $V(\boldsymbol{x})$ 沿任意轨迹是连续地减小的,因此 $V(\boldsymbol{x})$ 是一个李亚普诺夫函数。由于 $V(\boldsymbol{x})$ 随偏离平衡状态趋于无穷大而变为无穷大,所以在原点处的平衡状态是在大范围内渐近稳定的。

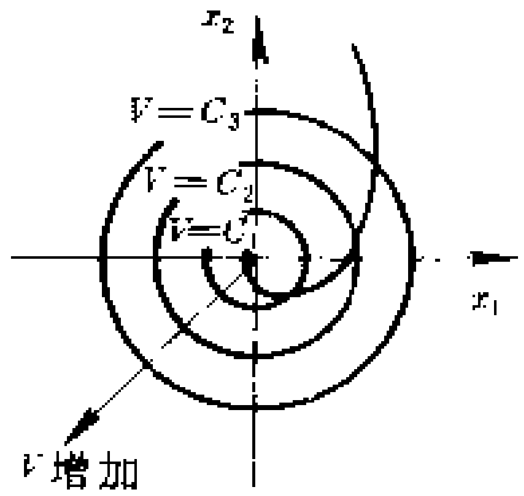


图 4-3　等 V 圆和典型轨迹

注意到,如果使 $V(\boldsymbol{x})$ 取一系列的常值 $0, c_1, c_2, \cdots, (0<c_1<c_2<\cdots)$,那么 $V(\boldsymbol{x})=0$ 对应于状态平面的原点,而 $V(\boldsymbol{x})=C_1, V(\boldsymbol{x})=C_2$ 描述了包围状态平面原点的互不相交的圆族,如图 4-3 所示。还应注意,由于 $V(x)$ 是径向无界的,随着 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 时,有 $V(x)\to\infty$,所以圆族可扩展到整个状态平面。

由于圆 $V(\boldsymbol{x},t)=C_k$ 完全处在 $V(\boldsymbol{x},t)=C_{k-1}$ 的内部,因而典型轨迹从外向内通过 V 圆的边界。因此,李亚普诺夫函数的几何意义可阐述如下:$V(\boldsymbol{x})$ 表示状态空间的原点到状态 $\boldsymbol{x}$ 距离的尺度。如果原点与瞬时状态 $x(t)$ 之间的距离随 t 的增加而连续地减小〔即 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)<0$〕,那么 $\boldsymbol{x}(t)\to 0$。因此,李亚普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})$ 可看成在状态空间中与原点的距离,李亚普诺夫函数的导数可用来估算接近原点的速度。

如果定理 1 中关于 V 函数的第(2)个条件不能严格成立,则将出现以下情况:

A. 如果系统不是恒定耗散的,并且在 $S(\Delta)$ 球域内某些轨迹

上，或者在整个球域内 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$，只要条件(1)仍然成立，即 $V(\boldsymbol{x},t)$ 正定，那么由拉格朗日定理，系统在原点处于一般意义下的稳定。

B. 虽然在球域 $S(\Delta)$ 内某些点 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$，但任何时刻从球域 $S(\Delta)$ 出发的任何状态轨迹上 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 不恒等于零。这时，那些 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 处表示状态轨迹和 V 的某等值面相切。不过相切之后，轨迹仍然向原点延伸。因此系统仍然是渐近稳定的。设 $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0;t_0)$ 表示 t_0 时刻从 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的状态轨迹，我们有以下定理：

定理 2： 设系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \tag{4.19}$$

并且

$$\boldsymbol{f}(0,t)=0 \qquad (t\geqslant t_0) \tag{4.20}$$

如果在原点的 Δ 球域 $S(\Delta)$ 内存在一个具有连续一阶导数的标量函数 $V(\boldsymbol{x},t)$，并且满足：

(1) $V(\boldsymbol{x},t)$ 正定；

(2) $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{d}t}$ 非正定；

(3) $dV[\boldsymbol{x}(t;x_0;t_0),t]/dt\neq 0$ 对于任意初始时刻 t_0 和 $S(\Delta)$ 内任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 成立，则原点的平衡状态在球域 $S(\Delta)$ 内是渐近稳定的。

如果上述关于 V 函数的条件在整个状态空间成立，则原点的平衡状态为大范围渐近稳定。

一般说来，一个工程控制系统是一个耗散系统，在能量耗散过程中系统达到控制目标，即某个预期的状态。因此，渐近稳定问题在控制理论中显得特别重要。在讨论定常系统稳定性时，我们所叙述的稳定性概念实际上已经是一种渐近稳定性。只是在那里我们没有作这样严格的陈述。由于控制系统不一定都是由物理系统所构成，李亚普诺夫将判断函数从能量 E 推广到一般的状态函数

V，使得李亚普诺夫稳定性理论在非线性控制系统中得到广泛的应用。

李亚普诺夫曾经提出另一种方法判断系统的稳定性。在那里，需要对状态方程解的性质有某种了解，对于非线性系统，在应用上常常是不可能的。那种方法通常称为李亚普诺夫第一法。

本节所介绍的方法，关键在于求出李亚普诺夫函数 V，通常称为第二法。

前面两个定理都是给出了判断渐近稳定性的充分条件，因此不能作出关于不稳定性的任何结论。下面说明不稳定性问题。

如果对于某个实数 $\varepsilon>0$ 和任意实数 $\delta>0$，不管多么小，在球域 $S(\delta)$ 内总存在一个状态 $\boldsymbol{x}_0$，使得从这一点出发的状态轨迹脱离球域 $S(\varepsilon)$。那样的平衡状态就是不稳定的。下述定理给出了平衡状态不稳定的充分条件：

定理 3： 假设系统由下列方程描述：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$$

式中

$$\boldsymbol{f}(0,t) = 0 \qquad (t \geqslant t_0)$$

如果存在一个标量函数 $W(x,t)$，它具有连续的一阶偏导数且满足下列条件：

(1) $W(\boldsymbol{x},t)$ 在原点的某一邻域内是正定的。

(2) $\dfrac{\mathrm{d}W(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{d}t}$ 在同样的邻域内是正定的。

那么，原点处的平衡状态是不稳定的。

三、李亚普诺夫函数的构造方法

应用李亚普诺夫理论的关键在于寻找李亚普诺夫函数。

由于非线性系统的稳定性具有局部的性质，因此我们通常找出在原点周围最大邻域内满足稳定条件的李亚普诺夫函数。

建立在李亚普诺夫第二方法基础上的几种方法，对于判断非

线性系统的稳定性是有效的。这一节首先介绍两种这样的方法，即判断渐近稳定性充分条件的克拉索夫斯基(krasovskii)法和构成李亚普诺夫函数的舒尔茨一吉布生(Schultz－Gibson)的变量一梯度法，然后回过来讨论线性定常系统的稳定性。并且发现，在线性系统中，如果平衡状态是局部渐近稳定的，那么它就是在大范围内渐近稳定的。

1. **克拉索夫斯基方法** 对于某些非线性系统，一个可能的李亚普诺夫函数可用 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 来表示。克拉索夫斯基提出的李亚普诺夫函数是从力学中动能表达式引伸出来的：$V = |\dot{\boldsymbol{x}}|^2$，这在数学上被定义为向量 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 的范数平方。

克拉索夫斯基给出了李亚普诺夫函数可能具有这种形式的充分条件。

对于所讨论的系统，可能存在有多个平衡状态，不过我们能通过适当的坐标变换，将任一被隔离的平衡状态转换到状态空间的原点。所以，我们仍然把所研究的平衡状态取作原点。

现在我们来介绍克拉索夫斯基定理。

设系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{4.21}$$

式中的 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维向量。假设 $\boldsymbol{f}(0)=0$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$对 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$是可微的。系统的雅可比(Jacobian)矩阵 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

设

$$\hat{J}(x) = J^*(x) + J(x) \tag{4.23}$$

式中的 $J^*(x)$为 $J(x)$的共轭转置矩阵。如果赫米特矩阵 $\hat{J}(x)$是负定的，那么平衡状态 $x=0$ 是渐近稳定的。这个系统的李亚普诺夫函数为

$$V(x) = |\dot{x}|^2 = f^*(x)f(x) \tag{4.24}$$

下面应用李亚普诺夫定理 1，对上述结论作出证明。由于 $V(x) = |\dot{x}|^2$，它的正定性质是自明的。注意到

$$\dot{f}(x) = J(x)\dot{x} = J(x)f(x) \tag{4.25}$$

我们可得 $\dot{V}(x)$为

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \dot{f}^*(x)f(x) + f^*(x)\dot{f}(x) \\
&= [J(x)f(x)]^* f(x) + f^*(x)J(x)f(x) \\
&= f^*(x)[J^*(x) + J(x)]f(x) \\
&= f^*(x)\hat{J}^*(x)f(x)
\end{aligned}$$

由于 $J(x)$是负定的，那么 $\hat{J}(x)$也是负定的，于是 $\dot{V}(x)$也是负定的。这样定理 1 两个条件都成立，原点是渐近稳定的。

如果随 $|x|\to\infty$，$V(x)=f^*(x)f(x)$在全空间正定，并趋向无穷大，那么所讨论的平衡状态是大范围稳定的。

注意，要使 $\hat{J}(x)$为负定的，就要求 $J(x)$的主对角线上的所有元素不恒等于零；如果 $f_i(x)$实际上与 x 无关，那么 $\hat{J}$ 就不可能是负定的。

〔例 2〕利用克拉索夫斯基定理来确定下式所表示的系统于平衡状态 $x=0$ 的稳定性：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

对于这个系统

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 & 0 \\ x_1 & -x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$$

和

$$J(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} \hat{J}(x) &= J^T(x) + J(x) \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于 $\hat{J}(x)$对所有 $x \neq 0$ 是负定的，所以平衡状态 $x=0$ 是渐近稳定的。此外，随着$|x| \to \infty$

$$f^{-T}(x)f(x) = x_1^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \to \infty$$

所以平衡状态 $x=0$ 是在大范围内渐近稳定的。

2. **变量梯度法** 舒尔茨－吉布生设想李亚普诺夫函数可以用力学中有势力场的势能所具有的性质推演而来。从力学中可知：有势力场的场强一方面是无旋的，另一方面又是势能的梯度的负值。根据这一线索可以在状态空间去构想一个状态向量的标量函数 $V(x)$，然后去检验是否符合李亚普诺夫函数的条件。下面在数学上说明舒尔茨－吉布生方法的思路。

对于系统

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{4.26}$$

首先假定由状态向量 x 构成的某个向量 $S(x)$是无旋的，即

$$\mathrm{rot}S = 0$$

或

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_j} = \frac{\partial S_j}{\partial x_i} \quad (i \neq j; i,j = 1,\cdots,n) \tag{4.27}$$

由于是无旋的，必可写成某标量函数（比如 V）的梯度：

$$S = \mathrm{grad}V = \nabla V(x) \tag{4.28}$$

并且 S 在状态空间的曲线积分与路径无关。从而又可以求出标量函数 V。

$$V=\int_C S^T \mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_C (\nabla V)^T \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4.29}$$

为简便起见，取积分路径 C 从原点出发，沿状态向量的各分量方向进行：

$$V(\boldsymbol{x})=\int_0^{x_1} S_1 \mathrm{d}x_1+\int_0^{x_2} S_2 \mathrm{d}x_2+\cdots+\int_0^{x_n} S_n \mathrm{d}x_n \tag{4.30}$$

同时还可求出 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 的表达式：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n \tag{4.31}$$

注意到式(4.26)和(4.28)，上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=S_1(x)f_1(x,t)+\cdots+S_n(x)f_n(x,t) \tag{4.32}$$

这样求出的 $V(\boldsymbol{x})$ 如果能够满足李亚普诺夫条件，则系统渐近稳定。否则，可以修改向量函数 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$。再次提起注意，由于所讨论的是充分条件，即使求不出 $V(\boldsymbol{x})$，也不能说明系统不稳定。舒尔茨－吉布生方法给出的只是一个思路，V 函数是由假设它的梯度出发的，因而以变量梯度法得名。具体步骤如下：

(1)通常假定向量 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ 具有如下形式：

$$\boldsymbol{S}=\nabla V=\begin{bmatrix} p_{11}x_1+p_{12}x_2+\cdots+p_{1n}x_n \\ p_{21}x_1+p_{22}x_2+\cdots+p_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n1}x_1+p_{n2}x_2+\cdots+p_{nn}x_n \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

式中系数 p_{ij} 可以设为常数或 t 的函数。

(2)根据式(4.27)，有 $p_{ij}=p_{ji}$，可使未知系数 p_{ij} 减少 $n(n-1)/2$ 个。

(3)应用式(4.32)可以确定 $\dfrac{dV}{dt}$ 负定或非正定对 p_{ij} 的限制。

(4)应用式(4.30)求出 $V(\boldsymbol{x})$，根据正定要求确定系数 p_{ij} 的最后取值。并且进而确定渐近稳定的范围。

〔例 3〕利用变量—梯度法构制下列系统的李亚普诺夫函数：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

设 V 的梯度为

$$\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

于是 V 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (\nabla V) \cdot \dot{x} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\dot{x}_1 + (a_{21}x_1 + 2x_2)\dot{x}_2 \\ &= -a_{11}x_1^2 + 2a_{11}x_1^3x_2 - a_{12}x_1x_2 + 2a_{12}x_1^2x_2^2 - a_{21}x_1x_2 - 2x_2^2 \end{aligned} \tag{A1}$$

让我们试探地选取

$$a_{11} = 1, \; a_{12} = a_{21} = 0$$

那么方程(A1)变为

$$\dot{V} = -x_1^2(1 - 2x_1x_2) - 2x_2^2$$

如果

$$1 - 2x_1x_2 > 0 \tag{A2}$$

那么 $\dot{V}$ 是负定的。因此，方程(A2)就是 x_1 和 x_2 的约束条件。梯度 ∇V 为

$$\nabla V = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

注意到

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = 0$$

可以看出，满足旋度方程。所以 V 为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{x_1,(x_2=0)} x_1 \mathrm{d}x_1 + \int_0^{x_2,(x_1=x_1)} 2x_2 \mathrm{d}x_2 \\ &= \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 \end{aligned} \tag{A3}$$

由这个李亚普诺夫函数，我们可以说在

$$1 > 2x_1x_2$$

范围内，系统是渐近稳定的。

为了说明由方程(A3)所确定的李亚普诺夫函数不是唯一可能的，让我们再取

$$a_{11} = \frac{2}{(1 - x_1x_2)^2}, \quad a_{12} = \frac{-x_1^2}{(1 - x_1x_2)^2},$$

$$a_{21} = \frac{x_1^2}{(1 - x_1x_2)^2}$$

于是

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 2x_2^2$$

$\dot{V}$ 在整个状态平面上是负定的。∇V 变为

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \dfrac{2x_1}{(1 - x_1x_2)^2} - \dfrac{x_1^2x_2}{(1 - x_1x_2)^2} \\ \dfrac{x_1^3}{(1 - x_1x_2)^2} + 2x_2 \end{bmatrix}$$

由于

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{3x_1^2 - x_1^3x_2}{(1 - x_1x_2)^3}$$

$$\frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = \frac{3x_1^2 - x_1^3x_2}{(1 - x_1x_2)^3}$$

满足旋度方程，所以 V 为

$$V = \int_0^{x_1} \left[\frac{2x_1}{(1 - x_1x_2)^2} - \frac{x_1^2x_2}{(1 - x_1x_2)^2}\right] dx_1 + \int_0^{x_2} \left[\frac{x_1^3}{(1 - x_1x_2)^2} + 2x_2\right] dx_2$$

$$= x_2^2 + \frac{x_1^2}{1 - x_1x_2} \tag{A4}$$

从这个李亚普诺夫函数中可看出，系统的原点在

$$1 > x_1x_2$$

范围内是渐近稳定的。

这明显地表明，由方程(A3)所确定的李亚普诺夫函数，给出的渐近稳定范围比由方程(A4)给定的李亚普诺夫函数的范围小。因此，后者的李亚普诺夫函数优于前者选取的李亚普诺夫函数。

3. **线性定常系统的稳定性** 将梯度向量函数写成式(4.33)形式对于构造线性定常系统以及线性时变系统都具有重要意义。这里仅讨论定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{4.34}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为常系统矩阵。只要 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$\boldsymbol{x}=0$ 为平衡位置。为方便起见式(4.33)可改写为

$$\boldsymbol{S} = \nabla V = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{4.35}$$

式中 $\boldsymbol{P}=[p_{ij}]$。由于梯度的无旋条件式(4.27)，有

$$p_{ij} = p_{ji} \tag{4.36}$$

即 P 是对称矩阵。根据式(4.29)积分式(4.35)可得 V 函数表达式：

$$V = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{4.37}$$

可以看出，这样构造的 V 函数是状态向量的二次型。它对时间的导数为

$$\dot{V} = \dot{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{4.38}$$

上式考虑了 $\boldsymbol{P}$ 是对称矩阵。注意到状态方程(4.34)，式(4.38)变为

$$\dot{V} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \tag{4.39}$$

上式假定了

$$-\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} \tag{4.40}$$

可以看出：如果所构成的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是正定的，并且又能使 $\boldsymbol{Q}$ 正定，那么就能使 V 函数稳定，$\dot{V}$ 为负定。根据李亚普诺夫定理 1，$\boldsymbol{x}=0$ 处为渐近稳定。对于定常系统，由于 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 都与 $\boldsymbol{x}$ 无关，所以只要

渐近稳定就一定是全局渐近稳定。

设 $Q=I$，就可以将 p_{ij} 就 a_{ij} 解出。这时矩阵 P 的正定条件可以归结为系统矩阵的元素 a_{ij} 所以满足的条件。可以证明，这组条件就是线性定常系统稳定性劳斯判据，这就将李亚普诺夫理论和线性定常系统的稳定性理论统一起来了。读者不妨以二阶系统为例作一练习。

〔例 4〕研究宇宙飞船围绕惯性主轴的运动。欧拉(Euler)方程为

$$A\dot{\omega}_x-(B-C)\omega_y\omega_z=T_x$$
$$A\dot{\omega}_y-(C-A)\omega_z\omega_x=T_y$$
$$A\dot{\omega}_z-(A-B)\omega_x\omega_y=T_z$$

式中 A，B，和 C 表示围绕三个主轴的惯性矩；ω_x，ω_y 和 ω_z 表示围绕三个主轴的角速度；T_x，T_y 和 T_z 表示控制力矩。

假设宇宙飞船在轨道上翻滚。希望它停止翻滚，这就需要加上控制力矩，假设控制力矩为

$$T_x=k_1A\omega_x;\qquad T_y=k_2B\omega_y;\qquad T_z=k_3C\omega_z$$

试确定系统渐近稳定工作时的充分条件。

〔解〕假设所取的状态变量为：

$$x_1=\omega_x,\quad x_2=\omega_y,\quad x_3=\omega_z$$

于是系统的方程变为

$$\dot{x}_1-\left(\frac{B}{A}-\frac{C}{A}\right)x_2x_3=k_1x_1$$

$$\dot{x}_2-\left(\frac{C}{B}-\frac{A}{B}\right)x_2x_1=k_2x_2$$

$$\dot{x}_3-\left(\frac{A}{C}-\frac{B}{C}\right)x_1x_2=k_3x_3$$

或者为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1 & \frac{B}{A}x_3 & -\frac{C}{A}x_2\\ -\frac{A}{B}x_3 & k_2 & \frac{C}{B}x_1\\ \frac{A}{C}x_2 & -\frac{B}{C}x_1 & k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

平衡状态是原点，即 $\boldsymbol{x}=0$。如果我们取

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\begin{bmatrix}A^2 & 0 & 0\\ 0 & B^2 & 0\\ 0 & 0 & C^2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$=A^2x_1^2+B^2x_2^2+C^2x_3^2$$

显然是正定的。而 $V(\boldsymbol{x})$的导数可写为

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}$$

$$=\boldsymbol{x}^T\begin{bmatrix}2k_1A^2 & 0 & 0\\ 0 & 2k_2B^2 & 0\\ 0 & 0 & 2k_3C^2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2k_1A^2 & 0 & 0\\ 0 & 2k_2B^2 & 0\\ 0 & 0 & 2k_3C^2\end{bmatrix}$$

于是

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$

如果 $k_1,k_2,k_3<0$，$\boldsymbol{Q}$ 是负定矩阵，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$也是负定的。因此，系统渐近稳定。注意到，当$|\boldsymbol{x}|\to\infty$时，有 $V(\boldsymbol{x})\to\infty$，平衡状态为大范围稳定。

习　　题

1. 试求图 5-1 所示的具有死区的继电器型的描述函数。

2. 图 5-2(a)表示具有死区和滞环的继电器型非线性的输入—输出特性曲线;图 5-2(b)表示具有这种非线性的继电器的输入和输出波形;求描述函数。

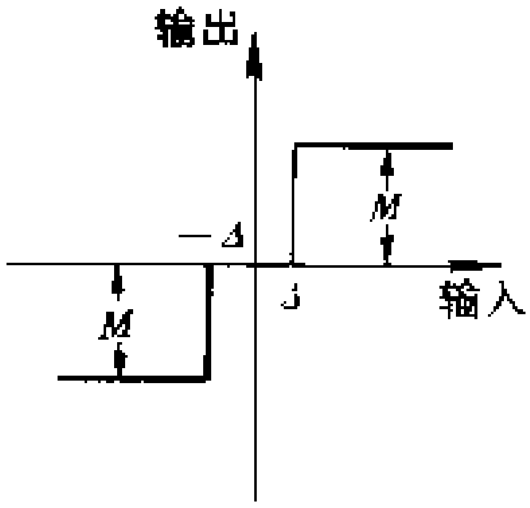


图 5-1

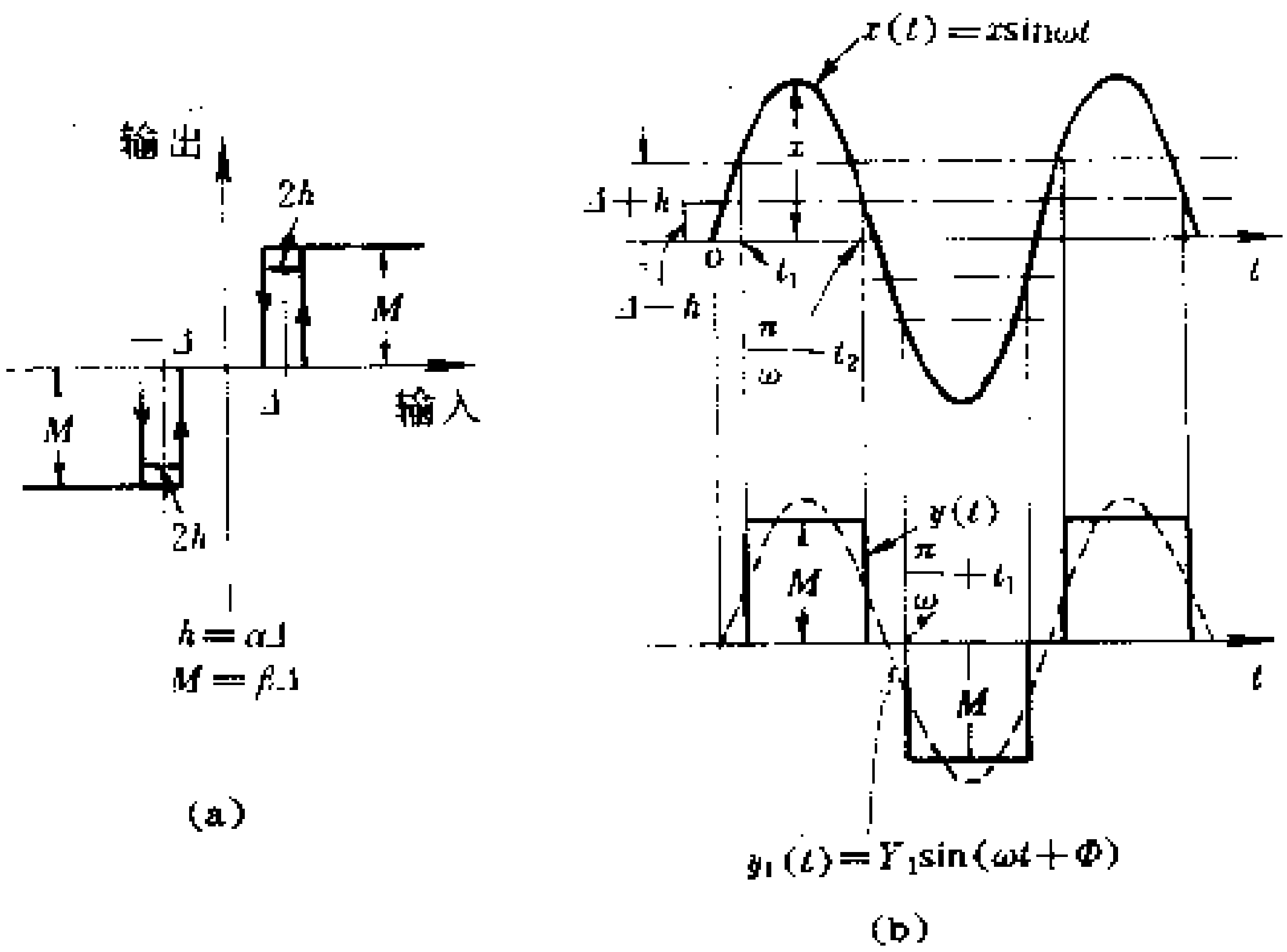


图 5-2 (a)具有死区和滞环的继电器型非线性的输入—输出特性曲线;
(b)具有死区和滞环的继电器型非线性的输入和输出波形

3. 对于由图 2-16 所描述的控制系统,在 $h=0.2$ 情形下将呈现一个 $\omega=5.9$/秒的极限环,如图 2-17。如要求极限环的频率减小

到 4/秒，试确定 $G(s)$ 增益的变更。（提示：假定 $G(j\omega)$ 的相位不变。）

4. 图 5-3 表示了一个带有库仑摩擦的二阶随动系统。库仑摩擦是一种摩擦力，它与速度的大小无关，但是它的方向总与速度方向相反。设系统的初始条件为：(1) $e(0)=2.2$，$\dot{e}(0)=0$；(2) $e(0)=3.5$，$\dot{e}(0)=0$。试在 $e-\dot{e}$ 平面上画出相轨迹。假设系统常数为 $K=2$，$J=1$ 和 $F=1$。

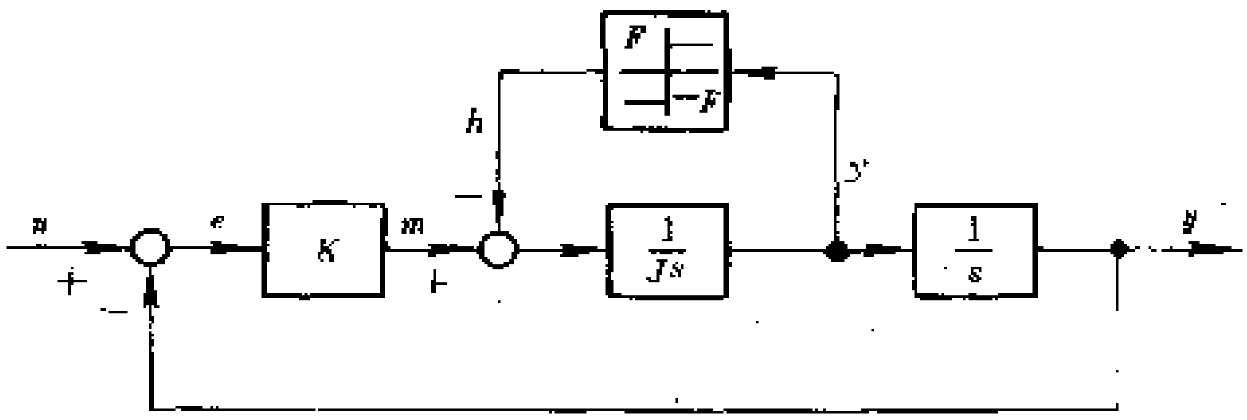


图 5-3　带有库仑摩擦的二阶随动系统

5. 设系统如图 5-4 所示，输入量 u 为单位斜坡函数。试画出 $e-\dot{e}$ 平面上的典型相轨迹。

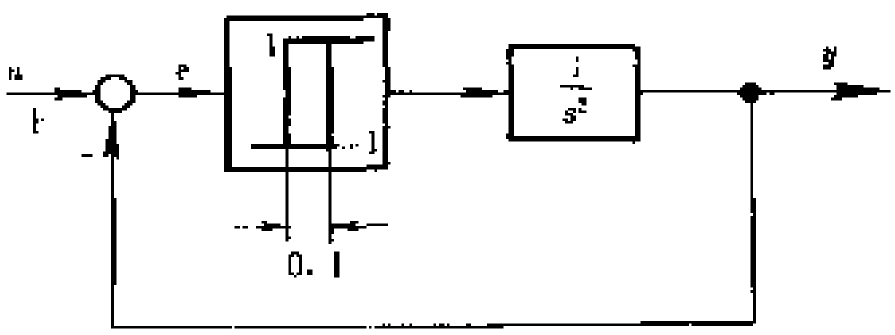


图 5-4　非线性控制系统

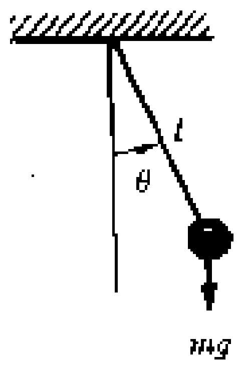


图 5-5　单摆

6. 设单摆如图 5-5 所示。该系统的方程为

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

试求其相轨迹方程。并作出相平面图。

7. 对于系统$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

试求其平衡状态，并确定其稳定性。

8. 应用变量梯度法确定线性时变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$$

原点的稳定性。式中

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\\ \dfrac{-1}{t+1} & -10\end{bmatrix}$$

9. 试证明系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -(a_1x_1 + a_2x_1^2x_2)\end{cases}$$

当 $a_1>0, a_2>0$ 时是全局渐近稳定的。

第五章　离散系统

离散系统在这里是专指时间坐标是离散的情形下的控制系统. 下面着重阐述离散系统的状态方程、传递函数以及相应的数学方法.

§1　离散系统的状态方程

一个系统的状态方程或者传递函数，从根本上说，是基于实际测量结果推演出来的. 这种测量，特别是数据的提取，在很多情形下没有必要也不可能连续地进行. 无论通过电子数字计算机的自动采样或者人工提取都是这样. 而所建立的连续形式的状态方程或者传递函数是根据一整套连续量的数学理论进行推想的结果. 由于电子数字计算机的发展与应用，连续形式的数学关系不断显示出自身的局限性. 从牛顿—莱布尼兹时代已经开始了的关于不连续量的数学关系的研究到了二十世纪中期得到广泛的应用和发展.

一、离散函数的解析表达式

1. 函数的离散形式　完全不连续的量称为**离散量**. 量的离散形式是多种多样的：可以是规则的，也可以是不规则的，或者随机的. 最简单的规则的离散量是周期性的. 比如自然数，就是以 1 为周期的最简单的离散量. 周期为 T 的离散量是这样一个无穷数列：

$$\cdots, -2T, -T, 0, T, 2T, \cdots \qquad (1.1)$$

我们将集中研究这类离散量及其函数. 如无特别说明，后面提到的

"离散"一词就是指周期性的.

现在进一步讨论离散量的函数. 图 1-1(a)所表示的函数

$$y = f(t) \tag{1.2}$$

是时间 t 的连续函数. 自变量 t 和因变量 y 一般都定值在连续区间上. 假如 t 是一个如数列(1.1)所描述的离散量,即一个周期性的数的集合,那么以这种离散的 t 为自变量的函数 y 尽管仍然具有和图 1-1(a)所表示的那种对应关系,但是只在由数列(1.1)所构成的一列孤立的点上成立. 不包含这些点的所有开区间如($-2T,-T$),($0,T$)等等,y 都没有定义. y 和 t 之间的关系只能表示为图 1-1(b)那样的一列数. 或者写成数列

$$\cdots, f(-2T), f(-T), 0, f(T), f(2T), \cdots \tag{1.3}$$

这个数列也称为**离散函数**,记作 $f(kT)$.

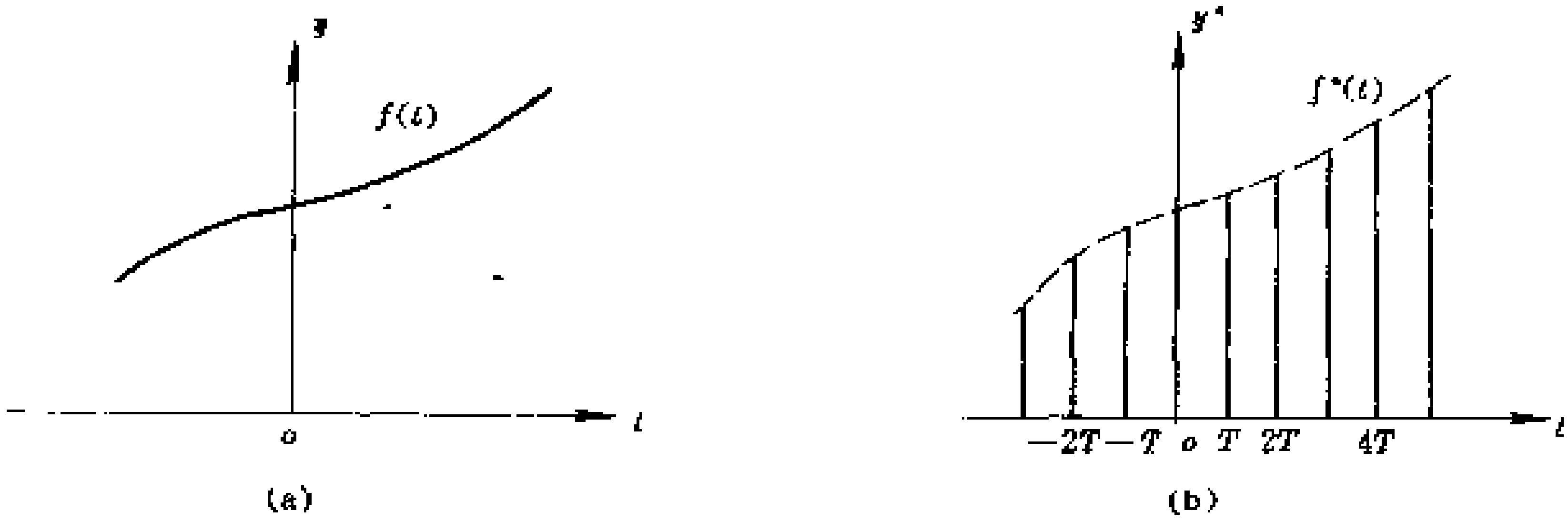


图 1-1 连续函数离散化

上面只讨论了函数定义域的离散化. 事实上,函数本身的取值也可以是离散的. 数字计算机中的数值是整量化的. 这是离散性的另一方面表现. 这里重点研究定义域的离散化问题.

2. 离散函数的解析表达式

图 1-2 形象地表示了离散函数,即函数列(1.3)的连续函数 $f(t)$的产生过程. 这是电子数字计算机的采样示意图. 计算机通过采样开关从连续量(或称模拟量)取得离散数据. 采样开关由周期

为 T 的脉冲列控制. 脉冲出现一次，开关闭合一下，计算机取得一个数据. 开关闭合的时间极短，可以忽略不计. 在开关断开时，计算机不能取得数据，离散函数在这段时间没有定义. 但是为了简化对离散函数的表述，我们对离散函数在没有定义的区间上进行人为赋值. 假定我们人为赋值为零. 并对这样赋值以后而连续起来的函数以 $f^*(t)$来表示，那么

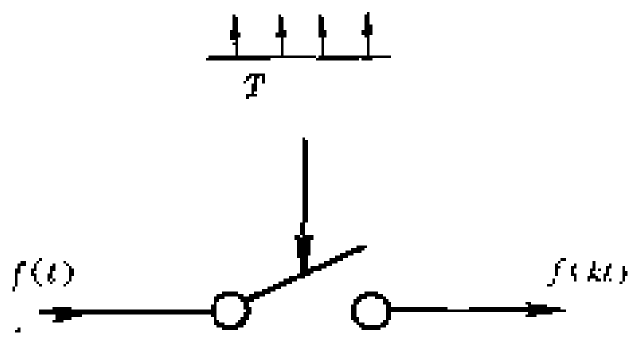


图 1-2　采样开关

$$f^*(t) = \begin{cases} f(kT) & t = kT \\ 0 & kT < t < (k+1)T \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots) \tag{1.4}$$

注意到单位脉冲函数的定义：

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} \infty & t = \tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases} \tag{1.5}$$

并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) \mathrm{d}t = 1 \tag{1.6}$$

$t=\tau$ 处是 δ 函数的奇点，这点的取值没有意义. 通常以其积分值来表示脉冲的特征值——强度. 令 $\tau=kT$，式(1.5)和(1.6)变为

$$\delta(t-kT) = \begin{cases} \infty & t = kT \\ 0 & kT < t < (k+1)T \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

以及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \mathrm{d}t = 1$$

将 $\delta(t-kT)$对 k 取和，并记作 $\delta_T(t)$，于是 $\delta_T(t)$是一个周期为 T 的离散函数，描写时间间隔为 T 的脉冲列，如图 1-3.

如果将这样定义的 $\delta_T(t)$和连续函数 $f(t)$相乘，就可在脉冲

强度意义上描写式(1.4)的离散函数 $f(t)$,即

$$f^*(t) = f(t)\delta_T(t) \quad (1.8)$$

于是

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kt)\delta(t-kt) \quad (1.9)$$

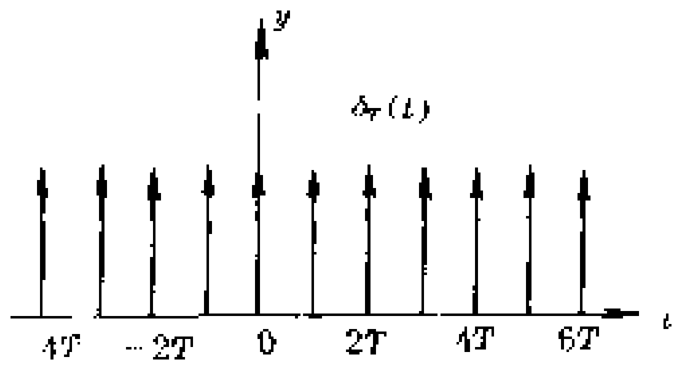


图 1-3 脉冲列

由于 δ 函数的性质,上式也可改写为

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) \quad (1.10)$$

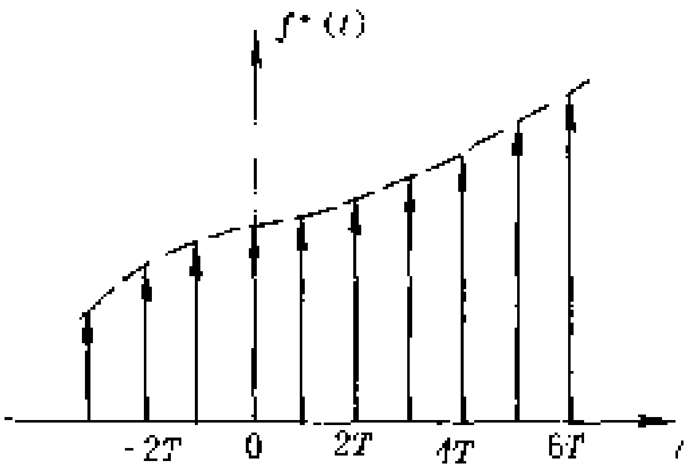


图 1-4 调制脉冲列

式(1.10)所表示的函数表示于图 1-4. 图中带箭头的脉冲高度强调表示所描述的是脉冲强度值. 如果把 δ 函数定义的脉冲强度当作通常的脉冲幅度,那么图 1-4 和图 1-1(b)是一致的. 用式(1.10)或(1.9)来描写离散函数 $f^*(t)$ 比用式(1.4)或函数列(1.3)来表示要简单得多. 所以式(1.9)或(1.10)的函数形式常被采用.

式(1.9)或(1.10)还十分形象地描写了计算机的采样过程. 如果图 1—2 中控制采样开关的脉冲列用 $\delta_T(t)$ 来描写,那么式(1.8)就表示离散函数 $f(t)$ 是连续函数 $f^*(t)$ 对脉冲列 $\delta_T(t)$ 的幅度的一种调制. 图 1-4 所表示的恰恰就是这种调制的结果.

在控制理论中,大多数问题总是把 $t=0$ 取作时间的起点,不考虑负半轴情形. 离散函数的表示形式也是这样. 式(1.9)和式(1.10)的取和通常也从零开始,即

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f(t)\delta(t-kT) \tag{1.11}$$

或

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT) \tag{1.12}$$

这种表示和连续函数假定 $t<0$ 时 $f(t)=0$ 是一致的.

3. **阶梯函数对连续函数的逼近** 人工采样或者计算机自动采样，总是把周期 T 取得足够小，使采样周期内的连续函数值的变化充分小，以致每次采样所得到的数值可以充分代表在一个周期内的连续函数值. 用图形表示，就是用阶梯函数来取代连续函数，如图 1-5. 根据函数连续性可以证明，只要采样周期 T 足够小，阶梯函数和连续函数之差为一阶小量. 阶梯函数通常记作 $f_h(t)$. 如图 1-5 所示，$f_h(t)$ 可以通过将离散函数 $f^*(t)$ 在每一时刻 kT 之值恒定地保持时间间隔 T 来实现的.

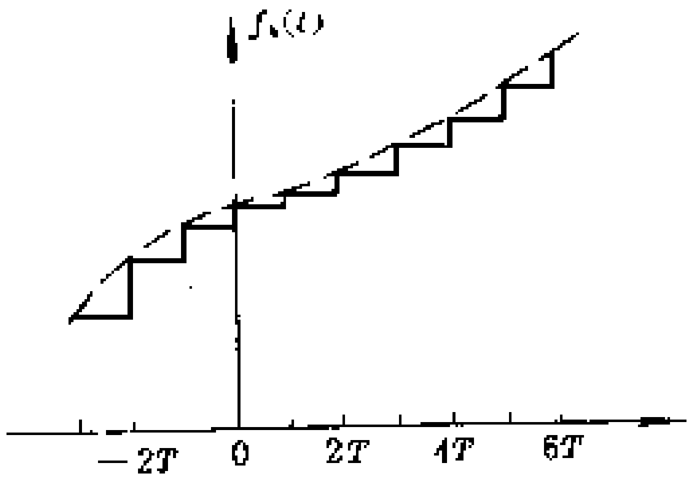


图 1-5 阶梯函数

注意到脉冲函数的积分是阶跃函数：

$$\int_0^t \delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}1 & (t>t_0)\\ 0 & (t<t_0)\end{cases} \tag{1.13}$$

如图 1-6 所示，$\delta(t-t_0)$ 的积分是单位阶跃函数 $1(t-t_0)$. 它具有保持脉冲幅度的功能. 因此 $f_h(t)$ 可以由 δ 函数的积分来构成：

$$f_h(t)=f(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\{f(kT)-f[(k-1)T]\}\int_0^t\delta(\tau-kT)\mathrm{d}\tau \tag{1.14}$$

根据式(1.12)，上式可变为

$$f_h(t)=\int_0^t[f^*(\tau)-f^*(\tau-T)]\mathrm{d}\tau \tag{1.15}$$

从离散函数 $f^*(t)$ 到阶梯函数 $f_h(t)$，在计算机里是通过存储器的记忆来完成的. 采样数据的存储器又称为保持器.

应当强调指出，$f_h(t)$ 对 $f(t)$ 的逼近不是无限的. 这特别是因为采样周期在许多实际问题中不能看作是无限小. 下面集中讨论函数的有限逼近方法，通常称为有限差分法.

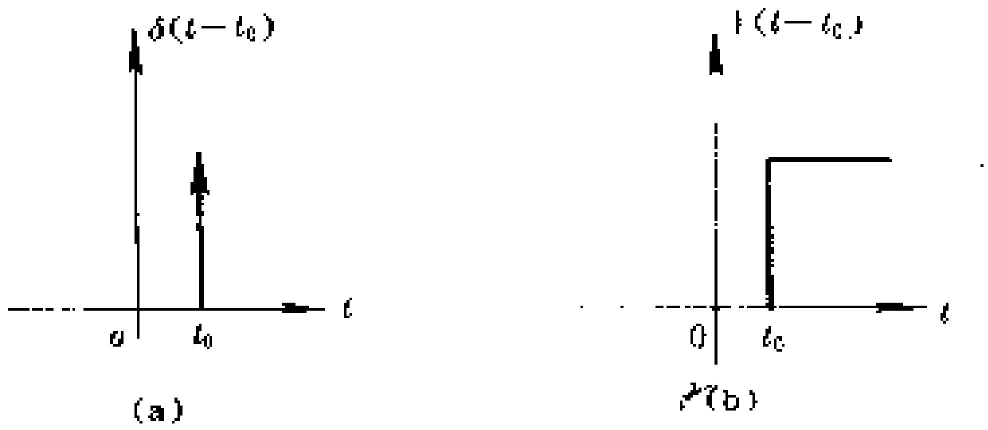


图 1-6　δ 函数的积分

二、 状态方程的离散化

1. 一阶微分方程的差分形式　设函数 $f(t)$ 的离散形式为 $f(kT)$，则 $f(t)$ 的一阶导数也可近似地表示为

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{f[(k+1)T]-f(kT)}{T} \tag{1.16}$$

同理，对于一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = ay(t) - g(t) \tag{1.17}$$

也可近似表示为

$$\frac{y[(k+1)T]-y(kT)}{T} = ay(kT) + g(kT)$$

或

$$y[(k+1)T] = (aT+1)y(kT) + Tg(kT) \tag{1.18}$$

上式是一阶微分方程(1.17)的差分形式. 称为一阶差分方程.

为简化方程的表示，通常令 $T=1$，于是方程(1.18)可改写为

$$y(k+1) = (a+1)y(k) + g(k) \tag{1.19}$$

2. 状态方程离散化　对于线性系统的状态微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{1.20}$$

不难看出，对应的差分方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=[\boldsymbol{A}(k)+\boldsymbol{I}]\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{1.21}$$

或者写成

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{1.22}$$

式中

$$\boldsymbol{P}(k)=A(k)+\boldsymbol{I} \tag{1.23}$$

$$\boldsymbol{Q}(k)=\boldsymbol{B}(k) \tag{1.24}$$

微分方程(1.20)写成差分方程(1.22)的过程，通常称为连续状态方程的离散化.

事实上，通过状态转移方程可以进行更精确的离散化. 以定常系统为例作一说明. 设状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{1.25}$$

注意到系统的状态转移距阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=e^{A(t-t_0)} \tag{1.26}$$

由式(1.25)表示的系统，其状态转移方程为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

或

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+e^{At}\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau \tag{1.27}$$

设 $t=(k+1)T, t_0=kT$，则

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T]=e^{AT}\boldsymbol{x}(kT)+e^{A(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T}e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

如果用 $\boldsymbol{u}(kT)$来近似 $\boldsymbol{u}(\tau)[kT\leqslant\tau\leqslant(k+1)T]$，并且作变量替换，上式可写成

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T]=e^{AT}\boldsymbol{x}(kT)+\left[e^{-AT}\int_{0}^{T}e^{-At}\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(kT)$$

令 $T=1$，上式也可写成方程(1.22)的形式：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \tag{1.28}$$

不过这里

$$P = e^{A} \tag{1.29}$$

$$Q = \left(e^{AT}\int_{0}^{T} e^{-AT}\mathrm{d}t\right)B \tag{1.30}$$

如果式(1.29)和(1.30)进行指数展开，并取一阶近似，则归结为式(1.23)和(1.24). 可见方程(1.22)—(1.24)所表示的离散化方法是方程(1.28)—(1.30)所表示的方法的一阶近似.

同理，对于连续的输出方程

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{1.31}$$

可以写出差分形式为

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \tag{1.32}$$

归纳起来，由离散方程

$$x(k+1) = P(k)x(k) + Q(k)u(k) \tag{1.33}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \tag{1.34}$$

所描写的系统称为**离散系统**. 很多实际问题所能直接求得的方程常常是离散的.

三、离散状态方程的迭代解法

现在讨论离散状态方程的解法.

假定系统是定常的，状态方程由式(1.33)所表示，则令 $k=0$、1,2…，逐次代入方程(1.23)可得：

$$x(1) = Px(0) + Qu(0) \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned} x(2) &= Px(1) + Qu(1) \\ &= P^2x(0) + PQu(0) + Qu(1) \end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\vdots$$

$$x(k) = P^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} P^{k-i-1}Qu(i) \tag{1.37}$$

$$\vdots$$

上述过程一直进行下去，就可求得任意时刻 kT 的状态变量.

这是一种迭代过程，在计算机上计算起来非常方便. 式(1.37)表示迭代过程的一般递推关系. 根据式(1.37)可以求出方程(1.33)的一切数值解. 式(1.37)因而称为**离散的状态转移方程**.

四、人口发展方程

作为例子，介绍宋健等建立的人口发展方程*

假定下面的讨论是对某个国家而言的. 先说明所设定的量的含义:

k—年份

m—可能活到的最高年龄.

$x_i(k)$—年份 k，年龄为 i 岁的人口数($i=0,1,\cdots,m$). 向量 $\boldsymbol{x}(k)=[x_0(k),x_1(k),\cdots,x_m(k)]$表示年份 k，年龄分别为 0 岁(未满周岁)，1 岁，…，m 岁的人口分布.

$\mu_i(k)$—年份为 k，年龄为 i 岁的人口相对死亡率. 显然

$$\mu_i(k)\leqslant 1 \quad (i=0,1\cdots,m-1)$$
$$\mu_m(k)\equiv 1$$

$[1-\mu_i(k)]$—年份为 k，年龄为 i 的人口存活率.

$[1-\mu_i(k)]x_i(k)$—年份为 k，年龄为 i 的人中能够活到下一年的人口. 这部分人口到年份 $k+1$ 就变为 $i+1$ 岁了.

于是人口系统的自然发展关系为

$$\begin{cases} x_1(k+1)=[1-\mu_0(k)]x_0(k) \\ x_2(k+1)=[1-\mu_1(k)]x_1(k) \\ \vdots \\ x_m(k+1)=[1-\mu_{m-1}(k)]x_{m-1}(k) \end{cases} \tag{1.38}$$

假定外部因素对该系统的扰动，诸如移民、战争、灾害等可以用 $\boldsymbol{u}(k)=[u_0(k),u_1(k),\cdots,u_{m-1}(k)]$表示，则人口发展方程(1.38)变为

---

* 宋健等:人口发展过程预测，中国科学 1980(9):920.

$$
\begin{cases}
x_1(k+1) = [1-\mu_0(k)]x_0(k) + u_0(k) \\
x_2(k+1) = [1-\mu_1(k)]x_1(k) + u_1(k) \\
\qquad\vdots \\
x_m(k+1) = [1-\mu_{m-1}(k)] + u_{m-1}(k)
\end{cases}
\tag{1.39}
$$

现在分析人口出生问题. 假定:

$w_i(k)$—年份为 k,年龄为 i 人口中女性比例. 据 1980 年统计,平均为 0.487. 因此,i 岁女性人口为 $w_i(k)x_i(k)$.

h_i—表示一个妇女在生育年龄段里第 i 岁生育的几率,或者 i 岁妇女中生育人数占全体育龄妇女的比例. 向量 $\boldsymbol{h}$ 所表示的分布称为生育模式.

r_1, r_2—分别为妇女生育年龄的下限和上限.

h 所表示的分布显然是归一化的:

$$
\sum_{i=r_1}^{r_2} h_i = 1 \tag{1.40}
$$

这样,在年份 k,i 岁育龄妇女的生育人数为 $h_i w_i(k)x_i(k)$. 年份 k 生育妇女的总人口数为

$$
\eta(k) = \sum_{i=r_1}^{r_2} h_i w_i(k) x_i(k) \tag{1.41}
$$

假定一个妇女在年份 k 平均生育的婴儿数为 $\beta(k)$,于是年份 k 出生的人口为

$$
\psi(k) = \beta(k)\eta(k) \tag{1.42}
$$

设婴儿死亡率为 $\nu_0(k)$,于是存活的婴儿为

$$
x_0(k) = [1-\nu_0(k)]\psi(k) \tag{1.43}
$$

考虑式(1.41)和(1.42),上式变为

$$
x_0(k) = [1-\nu_0(k)]\beta(k)\sum_{i=r_1}^{r_2} h_i w_i(k) x_i(k) \tag{1.44}
$$

将方程(1.44)和(1.39)联合起来就可得到$(m+1)$维状态向量的离散方程. 但是宋健等人为突出生育控制,将式(1.44)代入方

程组(1.39)的第一式而得 m 维向量方程：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{x}(k)+\beta(k)\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}(k) \tag{1.45}$$

这里 $\boldsymbol{x}(k)$ 和 $\boldsymbol{u}(k)$ 都是 m 维向量

$$\boldsymbol{x}(k)=\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}(k)=\begin{bmatrix} u_0(k) \\ u_1(k) \\ \vdots \\ u_{m-1}(k) \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

$\boldsymbol{H}(k)$和 $\boldsymbol{B}(k)$都是 $m\times m$ 矩阵

$$\boldsymbol{H}(k)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\mu_1(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu_2(k) & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1-\mu_{m-1}(k) & 0 \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

$$\boldsymbol{B}(k)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & b_{r1}(k) & \cdots & b_{r2}(k) & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \end{bmatrix} \tag{1.48}$$

式中

$$b_i(k)=[1-\mu_0(k)][1-\nu_0(k)]h_i w_i(k)$$
$$(i=r_1,r_1+1,\cdots,r_2) \tag{1.49}$$

$\boldsymbol{H}(k)$称为状态转移矩阵，$\boldsymbol{B}(k)$称为生育矩阵.

以上就是人口发展过程的离散模型.

§2　离散状态方程的 z 变换

以前应用了拉普拉斯变换，使得线性定常系统的连续状态方程的推演和求解大为简化. 这里引入 z 变换，以期简化离散状态方

程的求解.

一、 z 变换的定义

首先研究离散函数的拉普拉斯变换. 设

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) \tag{2.1}$$

$f^*(t)$的拉普拉斯变换象函数为

$$F^*(s) = \mathscr{L}[f^*(t)]$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)e^{-sT}\mathrm{d}t$$

根据 δ 函数的性质，上式变为

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \tag{2.2}$$

可以看出，$F^*(s)$中含 s 的因子都是指数，为简化起见，令

$$z = e^{Ts} \tag{2.3}$$

式(2.2)变为

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = F(z) \tag{2.4}$$

上式是关于 z 的表达式，它可以定义一种新的变换，称作 z **变换**. 定义如下：

离散函数 $f^*(t)$的 z 变换定义为

$$F(z) = \mathfrak{Z}[F^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \tag{2.5}$$

$F(z)$称为 $f^*(t)$的 z 变换的象函数.

应当指出，z 变换只就离散函数 $f^*(t)$〔或 $f(kT)$〕而定义的，它与连续函数 $f(t)$在离散点以外的各区间取值无关. 有时为简化书写，把 $F(z)$写成

$$F(z) = \mathfrak{Z}[f(t)] \tag{2.6}$$

其意义和式(2.5)一样，都是表示 $f(t)$离散化以后的 z 变换.

〔例 1〕设 $f(t)=1(t)$，即单位阶跃函数，求 $F(z)$.

〔解〕

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}1(kT)z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

上面应用了等比级数求和.

〔例 2〕设

$$f(t)=e^{-at}\quad(t\geqslant 0)\qquad 求\ F(z).$$

〔解〕

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-akT}z^{-k}=1+e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

二、z 变换的性质

下面介绍 z 变换的几个重要定理,证明从略.

1. **线性定理:**

$$\mathcal{Z}[af_1^*(t)+bf_2^*(t)]=aF_1(z)+F_2(z)\tag{2.7}$$

2. **实数域位移定理:**

$$\mathcal{Z}[f^*(t+T)]=zF(z)-zf(0)\tag{2.8}$$

以及

$$\mathcal{Z}[f^*(t-T)]=z^{-1}F(z)\tag{2.9}$$

3. **复数域位移定理:**

$$\mathcal{Z}[e^{-akT}f^*(t)]=F(ze^{aT})\tag{2.10}$$

4. **实数卷积定理:**

$$F_1(z)F_2(z)=\mathcal{Z}[f_1^*(t)*f_2^*(t)]\tag{2.11}$$

式中

$$f_1^*(t)*f_2^*(t)=\sum_{k=0}^{j}f_1[(j-k)T]f_2(kT)$$

$$= \sum_{k=0}^{j} f_1(kT) f_2[(j-k)T] \tag{2.12}$$

5. **初值定理**：

$$\lim_{t\to 0} f^*(t) = \lim_{z\to\infty} F(z) \tag{2.13}$$

上式假定了所讨论的极限存在

6. **终值定理**：如果函数$(1-z^{-1})F(z)$在 z 平面的单位圆上和圆外没有极点，则

$$\lim_{t\to\infty} f^*(t) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z) \tag{2.14}$$

三、z 变换的反变换

1. **$F(s)$和 $F(z)$的关系**　前面已经说明，连续函数 $f(t)$可用阶梯函数 $f_h(t)$来近似. 这时

$$f(t) = f_h(t) + \varepsilon_1(T) \tag{2.15}$$

式中 $\varepsilon_1(T)$是关于 T 的一阶小量. 上式的拉普拉斯变换为

$$F(s) = F_h(s) + \varepsilon_1(T) \tag{2.16}$$

式中 $F_h(s)$是式(1. 15)所表示的阶梯函数的拉普拉斯变换

$$F_h(s) = \frac{1}{s}F^*(s) - \frac{1}{s}e^{-Ts}F^*(s) \tag{2.17}$$

将上式右边第二项中 e^{-Ts}开展并取一阶近似，得

$$F_h(s) = TF^*(s) + \varepsilon_2(T) \tag{2.18}$$

$\varepsilon_2(T)$是 T 的另一个一阶小量. 将式(2. 18)代入(2. 16)，忽略一阶小量，近似可得

$$F(s) \approx TF^*(s) \tag{2.19}$$

根据式(2. 3)，上式右边作代换 $s = \frac{1}{T}\ln z$，于是

$$F(z) \approx \frac{1}{T}F(s) \tag{2.20}$$

上式给出了函数的拉普拉斯变换与 z 变换的关系. 由于 z 变换中 T 不能趋于零，上式只能是一阶近似表达式.

2. **反演积分公式**　注意到拉普拉斯反变换公式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}t \tag{2.21}$$

对于 $t=kT$ 的离散函数

$$f(kT)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{kTs}\mathrm{d}s \tag{2.22}$$

注意到式(2.3)，有

$$s=\frac{1}{T}\ln z,\quad \mathrm{d}s=\frac{1}{Tz}\mathrm{d}z$$

并应用式(2.20)，式(2.22)变为

$$f(kT)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c}F(z)z^{k-1}\mathrm{d}z \tag{2.23}$$

上式的积分曲线 C 应当是 s 平面上的积分曲线在 z 平面上的映射. 式(2.22)在 s 平面上的积分曲线为右半平面上平行于虚轴的直线

$$s=c+j\omega \tag{2.24}$$

式中，$c=$常数>0；$\omega\in(-\infty,+\infty)$. 将上式代入式(2.3)，得

$$z=e^{cT+j\omega T} \tag{2.25}$$

或

$$|z|=e^{cT} \tag{2.26}$$

由于 $c>0$，在 z 平面上的积分曲线为以原点为圆心，半径大于 1 的圆. 因此，式(2.23)应当确切地写成

$$f(kT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}F(z)z^{k-1}\mathrm{d}z\quad(k=0,1,2\cdots) \tag{2.27}$$

这就是 z 变换的反演公式.

事实上，式(2.27)还可通过罗朗级数展开式从 z 变换的定义求得，将式(2.5)两边乘以 z^{k-1} 可得

$$F(z)z^{k-1}=f(0)z^{k-1}+f(T)z^{k-2}+\cdots+f(kT)z^{-1}+\cdots \tag{2.28}$$

根据罗朗级数的系数表达式(参考数理方法书)，z^{-1}项的系数应写

为

$$f(kT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}F(z)z^{k-1}\mathrm{d}z \qquad (2.29)$$

这就是式(2.27). 上式右边的意义等价于复变函数 $F(z)z^{k-1}$ 被曲线 C 包围的全部极点的留数之和，即

$$f(kT)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1};z_i] \qquad (2.30)$$

式中 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 表示 $F(z)z^{k-1}$ 在 C 内侧的极点.

3. **部分分式展开法**　由于在线性控制系统中经常遇到的 z 变换象函数是有理分式函数. 因此，部分分式展开法求反变换有很多用处. 注意到许多象函数的分子者带有因子 z，常常将 $F(z)/z$ 展成部分分式，然后逐项求反变换. 以下举例说明.

〔例 3〕设

$$F(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

求 $f(kT)$.

〔解〕因为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{10}{z-2}-\frac{10}{z-1}$$

所以

$$F(z)=\frac{10z}{z-2}-\frac{10z}{z-1}$$

由于

$$\mathscr{Z}[1]=\frac{z}{z-1};\quad \mathscr{Z}[2^k]=\frac{z}{z-2}$$

故

$$f(kT)=\mathscr{Z}^{-1}[F(z)]=10(2^k-1)$$

四、离散状态方程的 z 变换

设离散定常系统的状态方程为

$$x(k+1)=Px(k)+Qu(k) \tag{2.31}$$

考虑到

$$\left.\begin{aligned} z[x(k+1)] &= zX(z)-zx(0) \\ z[Px(k)] &= PX(z) \\ z[Qu(z)] &= QU(z) \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

式中 $X(z)$和 $U(z)$分别表示 $x(k)$和 $u(k)$的 z 变换. 将式(2.32)代入(2.31),整理之后可得

$$X(z)=(zI-P)^{-1}zx(0)+(zI-P)^{-1}QU(z) \tag{2.33}$$

上式的反变换可写为

$$x(k)=\mathfrak{Z}^{-1}[(zI-P)^{-1}z]x(0)+\mathfrak{Z}^{-1}[(zI-P)^{-1}QU(z)] \tag{2.34}$$

这就是离散方程(2.31)的解. 对照该方程的迭代解:式(1.37),应当有

$$P^k=\mathfrak{Z}^{-1}[(zI-P)^{-1}z] \tag{2.35}$$

$$\sum_{i=0}^{z-1}P^{k-i-1}Qu(i)=\mathfrak{Z}^{-1}[(zI-P)^{-1}QU(z)] \tag{2.36}$$

可以证明上面两式成立,由于

$$\mathfrak{Z}[P^k]=\sum_{k=0}^{\infty}P^kz^{-k}=I-Pz^{-1}+P^2z^{-2}+\cdots P^kz^{-k}+\cdots \tag{3.37}$$

将上式乘以 Pz^{-1} 之后再以上式去减,可得

$$(1-Pz^{-1})\mathfrak{Z}[P^k]=I \tag{2.38}$$

或

$$(zI-P)z^{-1}\mathfrak{Z}[P^k]=I \tag{2.39}$$

于是

$$\mathfrak{Z}[P^k]=(zI-P)^{-1}z \tag{2.40}$$

上式的反变换就是式(2.35).

和连续状态方程类似,引入离散状态转移矩阵,

$$\Phi(k) = \mathscr{Z}^{-1}[(zI - P)^{-1}z] \tag{2.41}$$

根据式(2.40),上式等价于

$$\Phi(k) = P^k \tag{2.42}$$

根据实数域的负位移定理,式(2.9),有

$$\Phi(k-1) = \mathscr{Z}^{-1}[(zI - P)^{-1}] \tag{2.43}$$

于是式(2.36)右边可表示为

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}^{-1}[(zI - P)^{-1}QU(Z)] &= \Phi(k-1) * Qu(k) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P^{k-i-1}Qu(i)\end{aligned} \tag{2.44}$$

上式右边就是式(2.36)的左边.因此式(2.36)成立.

综上所述,离散定常系统的状态方程的解可以表示为

$$x(k) = \Phi(k)x(0) + \Phi(k-1) * Qu(k) \tag{2.45}$$

式中

$$\Phi(k) = P^k = \mathscr{Z}^{-1}[(zI - P)^{-1}z] \tag{2.46}$$

式(2.45)就是前面提到的离散状态转移方程,$\Phi(k)$为离散状态转移矩阵.

将式(2.45)代入输出方程(1.34),就得到离散输出向量,还可进一步引入离散系统的传递函数等等.

〔例 4〕设离散状态方程为

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + 1 \\ x_2(k+1) = -0.16x_1(k) - x_2(k) + 1 \end{cases}$$

且

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

求 $x(k)$.

〔解〕由于

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u = 1$$

于是

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})^{-1}=\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix}}{(z+0.2)(z+0.8)}$$

$$\boldsymbol{U}(z)=\mathcal{Z}[1]=\frac{z}{z-1}$$

以及

$$z\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}(z)=\begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{z}{z-1} \\ \dfrac{z}{z-1} \end{bmatrix}=\frac{1}{z-1}\begin{bmatrix} z^2 \\ 2z-z^2 \end{bmatrix}$$

应用式(2.33)可得：

$$\boldsymbol{X}(z)=(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})^{-1}[z\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}(z)]$$

$$=\frac{\begin{bmatrix} (z^2+2)z \\ (1.84-z)z^2 \end{bmatrix}}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{-\frac{17}{6}z}{z+0.2}+\dfrac{\frac{22}{9}z}{z+0.8}+\dfrac{\frac{25}{18}z}{z-1} \\ \dfrac{\frac{3.4}{6}z}{z+0.2}-\dfrac{\frac{17.6}{9}z}{z+0.8}-\dfrac{\frac{7}{18}z}{z-1} \end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{x}(k)=\mathcal{Z}^{-1}[\boldsymbol{X}(z)]=\begin{bmatrix} -\dfrac{17}{6}(-0.2)^k+\dfrac{22}{9}(-0.8)^k+\dfrac{25}{18} \\ \dfrac{3.4}{6}(-0.2)^k-\dfrac{17.6}{9}(-0.8)^k+\dfrac{7}{18} \end{bmatrix}$$

习　　题

1. 设 $f(t)=\sin\omega t$，求 $F(z)$.

2. 设

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$$

求 $f(kT)$.

3. 设目前国家 A 有 1 亿人口，A 内的城市 B 有 1 千万人口. 城市 B 每年有 4% 人口离开这个城市，而每年从这个城市以外的地方以 2% 的人口迁入城市 B. 每年人口自然增长率为 1%，试求 10 年后城市 B 的人口.

第六章　随机系统

如果控制系统的状态变量是随机地变化着的，人们只能对系统的统计行为进行控制。这样的控制系统称为**随机系统**。变量的随机性可能来源于环境的不确定性或者系统内部的不确定性，也可能由于环境剧烈地变化而引起的系统内部的不确定性。在这样的场合，如果系统依据环境或系统内部参数的变化不断地自动修正系统结构参数或者控制变量，使得系统的行为总能够符合某种控制准则，这类控制通常称为自适应控制。随机系统的自适应控制是现代控制理论正在发展着的重要领域。它的研究进展对于人工智能的开拓，控制理论在社会经济研究中的应用以及控制理论与非平衡统计物理之间的沟通等方面将起着重要作用。

本章的内容包括这个领域最基础性的工作，重点介绍维纳滤波和卡尔曼(Kalman)滤波。最后简要介绍自适应控制的基本思想。

§1　随机过程的基本概念

当一个变量可以准确地用一个时间函数来描述时，这个变量就称为确定性的。但实际过程中还有另一类变量。它们既不能用确定的时间函数来描述，也不能准确地加以重现，这类变量称为随机变量。随机变量的统计行为可以是确定的。这一节着重讨论随机变量的统计平均值、相关函数和功率频谱密度等概念，同时简略介绍随机过程的分类。

一、平均值和均方值

一个随机控制系统，它的状态变量、输入和输出变量都是随机变量。各种变量随着时间随机地变化的过程称为随机过程。为了方便起见，我们设想有许多相同的随机系统去讨论它们的集体行为。这种由许多相同的随机系统所构成的集合称为**系综**。图 1-1 表示了由 n 个相同系统构成的系综的某个变量的随机过程。统计平均值(或者均方值)是描写一个随机变量十分重要的统计值。对于一个系统来说，统计平均值有两种不同含义，即系综平均值和时间平均值。随机变量的系综平均值也称为数学期望值。

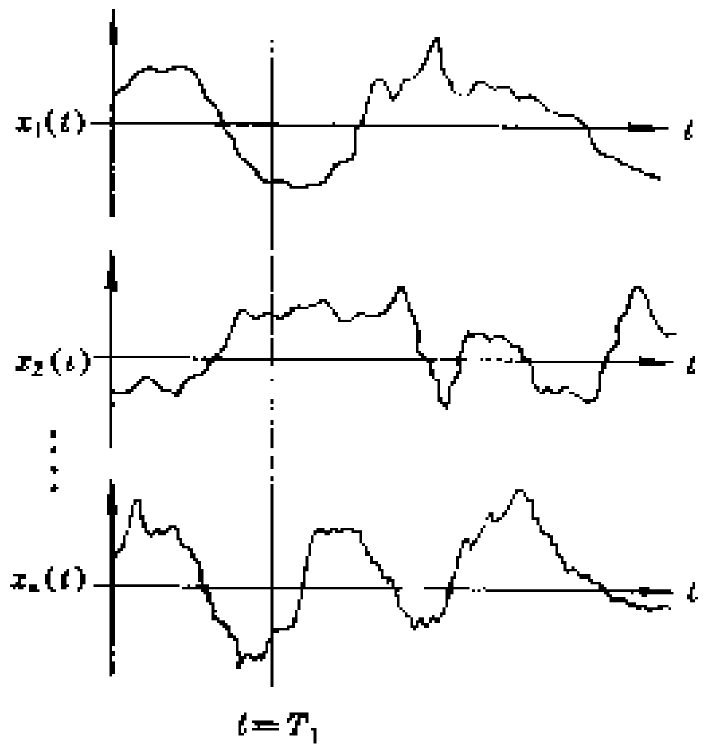


图 1-1　由 n 个系统构成的系综的随机过程

1. 随机变量的系综平均值　假如组成系综各个系统的某个随机变量 x 随时间 t 的变化过程表示为 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，则当 $t=T_1$ 时，它们的取值相应为 $x_1(T_1), x_2(T_1), \cdots, x_n(T_1)$。$t=T_1$ 时，变量 x 的系综平均值定义为

$$\overline{x(T_1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(T_1) \tag{1.1}$$

变量 x 的系综均方值定义为

$$\overline{x^2(T_1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(T_1) \tag{1.2}$$

平均值和均方值都是变量 x 对坐标原点(即 $x=0$)的偏差的统计描写。如果不考虑量纲，则前者描写偏差的代数平均值，后者描述偏差的算术平均值。

前面的讨论是对于系综而言的。只要 n 足够大，系综的平均值是确定的。并且 T_1 可以取遍 t 的一切可能取值。但是对于每个系统来说，在任意给定时刻 t，变量 x 的取值是不确定的，它可以取系综每个成员所取的一切可能数值。这时，我们只能说系统在时刻 t，变量 x 取某个确定数值的概率 $P(x,t)$ 是多少。或者表示为

$$P = P[x(t),t] \tag{1.3}$$

式中用 $x(t)$ 代替 x 可以更明确地表示出 t 时刻 x 取某个确定值的概率。

在许多场合，变量 x 虽然是随机的，但仍然可以近似地看成连续的。这时变量 x 的取值在 $[x, x+\Delta x]$ 内的概率密度的关系可以表示为

$$P = p[x(t),t]\Delta x \tag{1.4}$$

一般情况下，总是假定概率密度是归一化的，即满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} p[x(t),t]\mathrm{d}x = 1 \tag{1.5}$$

上式假定了变量 x 可取一切实数。否则积分限可以取某个确定的数值。

在这样的场合下，变量 x 在时刻 t 的系综平均值 $m(t)$ 和系综均方值 $q(t)$ 可以写成

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)p[x(t),t]\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)p[x(t),t]\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

平均值和均方值有时简单地记作 m 和 q。而

$$\sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m]^2 p[x(t),t]\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

则描写变量 x 在时刻 t 对其平均值 m 的统计偏差，σ^2 通常简称为**方差**。σ 则称为**均方差**。

为方便起见，对于式(1.6)—(1.8)中以概率密度 $p[x(t),t]$

为积分核的积分运算

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\quad]p[x(t),t]\mathrm{d}x$$

记作 $E[\quad]$。于是式(1.6)—(1.8)可分别写作

$$m(t)=E[x(t)] \tag{1.9}$$

$$q(t)=E[x^2(t)] \tag{1.10}$$

$$\sigma^2(t)=E\{[x(t)-m(t)]^2\} \tag{1.11}$$

2. **时间平均值** 图 1-1 表示系综各个成员的某个变量 x 随时间的变化过程。只要这一过程被测量出来,那么任意一个系统在时间间隔$[t_0,t_0+T]$内的平均值、均方值和方差可以方便地表示为

$$\overline{x(t)}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\mathrm{d}t=m$$

$$\overline{x^2(t)}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x^2(t)\mathrm{d}t=q$$

和

$$\overline{[x(t)-m]^2}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}[x(t)-m]^2\mathrm{d}t=\sigma^2$$

对于整个时间过程的平均值、均方值和方差则可写成:

$$m=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\mathrm{d}t \tag{1.12}$$

$$q=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.13}$$

$$\sigma^2=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{T}^{T}[x(t)-m]^2\mathrm{d}t \tag{1.14}$$

3. **平稳随机过程和各态经历过程** 前面讨论了两种平均值的概念。一般地说,系综的平均值是随时间变化的。对于某个随机过程如果系综的统计性质不随时间而变化,或者说每个系统的概率密度不随时间而变化,则这样的随机过程称为是**平稳的**。在平稳随机过程中,随机变量的统计平均值与时间无关,即

$$m(t)=E[x(t)]=\text{常量} \tag{1.15}$$

$$q(t)=E[x^2(t)]=\text{常量} \tag{1.16}$$

$$\sigma^2=E\{[x(t)-m]^2\}=\text{常量} \tag{1.17}$$

对于平稳的随机过程，我们假定系综的每个成员在整个时间过程中将经历系统的每一个可能状态（即变量 x 的每个可能取值），并且在时间过程中每个状态的概率密度与系综的统计结果一致。这样的随机过程又称为**各态经历过程**。

在经典的统计物理中，过程的各态经历是作为一个基本假定提出来的。在控制理论中，很多场合我们沿用这个假定。

在各态经历的前提下，随机过程的时间平均值和给定时刻的系综平均值是一致的：

$$E[x(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\mathrm{d}t=\overline{x(t)}=m \tag{1.18}$$

$$E[x^2(t)]=\overline{x^2(t)}=q \tag{1.19}$$

$$E\{[x(t)-m]^2\}=\overline{[x(t)-m]^2}=\sigma^2 \tag{1.20}$$

二、相关函数

两个随机变量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是随时间而变化的。如果其中一个变量在任何时刻总是以某种方式依赖于另一个变量，则称这两个变量是**相关的**。有时特别称为**互相关**。在很多情况下，同一变量 $x(t)$ 的当前值在某种程度上对该变量在时间 τ 以后的取值是有影响的，即 $x(t+\tau)$ 在一定程度上依赖于 $x(t)$，这种相关称为自相关。相关函数是描写变量间相互依赖程度的一个统计测度。

以下如不作特别说明，假定所讨论的是各态经历的平稳随机过程。

1. **自相关函数**　符号 $\varphi_{xx}(\tau)$ 表示变量 x 在时刻 t 的取值 $x(t)$ 与时刻 $t+\tau$ 的取值之间的自相关函数，定义为

$$\varphi_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{1.21}$$

上式是从时间平均值角度对自相关函数所作的定义。同样也存在从系综统计出发建立自相关的概念。

设 $p[x(t),t;x(t+\tau),t+\tau]$ 表示变量 x 在时刻 t 取值 $x(t)$，在时刻 $t+\tau$ 取值 $x(t+\tau)$ 的联合概率密度，于是，与式(1.21)对应的系综统计关系为

$$E[x(t)x(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) \cdot p[x(t),t;x(t+\tau),t+\tau]\mathrm{d}x(t)\mathrm{d}(t+\tau) \tag{1.23}$$

对于各态经历过程有

$$\varphi_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \tag{1.24}$$

自相关函数有如下基本性质：

(1) $\varphi_{xx}(0) = E[x^2(t)] = q$ (1.25)

(2) $\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(-\tau)$ (1.26)

(3) $\varphi_{xx}(\tau) \leqslant \varphi_{xx}(0)$ (1.27)

性质(1)表示 $\tau=0$ 时，$x(t)$ 的自相关函数等于它的均方值。性质(2)表示自相关函数是偶函数。它们都可从定义直接得到证明。

下面证明性质(3)。注意到

$$\begin{aligned}0 &\leqslant E\{[x(t+\tau)-x(t)]^2\}\\ &= E\{x^2(t+\tau) - 2x(t+\tau)x(t) + x^2(t)\}\\ &= E[x^2(t+\tau)] - 2E[x(t)x(t+\tau)] + E[x^2(t)]\\ &= 2q - 2\varphi_{xx}(\tau)\\ &= 2\varphi_{xx}(0) - 2\varphi_{xx}(\tau)\end{aligned}$$

所以

$$\varphi_{xx}(\tau) \leqslant \varphi_{xx}(0) \tag{1.28}$$

2. **互相关函数** 变量 x 的当前值 $x(t)$ 也可以影响另一个变量 y 的未来值 $y(t+\tau)$。互相关函数是这种关系的统计测度。用 $\varphi_{xy}(\tau)$ 或者 $E[x(t)y(t+\tau)]$ 来表示，并定义为

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{1.29}$$

或者

$$E[x(t)y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau) \cdot p[x(t),t;y(t+\tau),t+\tau]\mathrm{d}x(t)\mathrm{d}y(t+\tau) \tag{1.30}$$

类似地，对于各态经历过程也有

$$\varphi_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] \tag{1.31}$$

互相关函数一般不具有自相关函数那些特点。不过和自相关函数相类似的，有

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{yx}(-\tau) \tag{1.32}$$

上式右边 φ 的足标 x,y 相对位置发生了交换，因此并不意味着 $\varphi_{xy}(\tau)$ 是偶函数。只当 $y=x$ 时，互相关函数归结为自相关函数，才满足偶函数条件。

3. **协方差** 对相关概念进行推广就可以得到协方差的概念。设两个随机变量 x_1 和 x_2 分别在时刻 t_1 和 t_2 的系综平均值(或数学期望值)为 $m_1(t_1)$ 和 $m_2(t_2)$，则 $x_1(t_1)$ 和 $x_2(t_2)$ 对各自平均值的偏差之间的相关性可以表示为

$$C_x(t_1,t_2) = E\{[x_1(t_1) - m_1(t_1)][x_2(t_2) - m_2(t_2)]\} \tag{1.33}$$

$C_x(t_1,t_2)$ 称为随机变量 $x_1(t_1)$ 和 $x_2(t_2)$ 的**协方差**。

若 $x_1(t_1)=x_2(t_2)=x(t)$，则 $c_x=\sigma^2$。即协方差归结为前面提到的普通方差。

若所讨论的随机变量是一个 n 维向量：

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

那么 $\boldsymbol{x}(t_1)$和 $\boldsymbol{x}^T(t_2)$的并矢(外积)$\boldsymbol{x}(t_1)\boldsymbol{x}^T(t_2)$是一个$(n\times n)$矩阵：

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1x_1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\x_2x_1 & x_2x_2 & \cdots & x_2x_n\\\cdots & & & \\x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_nx_n\end{bmatrix} \tag{1.35}$$

式中没有明显标出时间关系，但暗含着不同的分量可以对应不同的时间。假定 $\boldsymbol{m}(t)$是随机向量 $\boldsymbol{x}(t)$的系综平均值，即

$$\boldsymbol{m}(t)=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{x}(t)]=\begin{bmatrix}m_1(t_1)\\m_2(t_2)\\\vdots\\m_n(t_n)\end{bmatrix} \tag{1.36}$$

则矩阵

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}}(t_1,t_2)=\boldsymbol{E}\{[\boldsymbol{x}(t_1)-\boldsymbol{m}(t_1)][\boldsymbol{x}(t_2)-\boldsymbol{m}(t_2)]^T\} \tag{1.37}$$

定义为随机向量 $\boldsymbol{x}(t)$的**协方差矩阵**

三、功率频谱密度

现在讨论自相关函数的物理意义。自相关函数 $\varphi_{xx}(\tau)$是定义在时域的函数，对它可以进行拉普拉斯变换或付立叶变换。$\varphi_{xx}(\tau)$的付立叶变换象函数可以写成

$$\Phi_{xx}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{1.38}$$

注意到

$$e^{-j\omega\tau}=\cos(\omega\tau)-j\sin(\omega\tau) \tag{1.39}$$

以及 $\Phi_{xx}(\tau)$是偶函数，于是

$$\Phi_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau = \Phi_{xx}(\omega) \tag{1.40}$$

上式由于 $\Phi_{xx}(j\omega)$ 实际上是实函数，所以写成 $\Phi_{xx}(\omega)$。另一方面，$\Phi_{xx}(\omega)$ 的付立叶反变换为

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\omega)e^{j\omega\tau}d\,\omega \tag{1.41}$$

当 $\tau=0$ 时，

$$\varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\omega)d\,\omega \tag{1.42}$$

注意到式(1.27)，有 $\varphi_{xx}(0)=\overline{x_2(t)}$。在数学上，这是变量 $x(t)$ 的时间均方值。如果 $x(t)$ 表示某种电信号(电压或电流)，则 $\overline{x^2(t)}$ 在物理上可以用来描写信号的平均功率 P_x。如果略去量纲因子，则可以写成

$$P_x = \overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\omega)d\,\omega \tag{1.43}$$

这表明：自相关函数 $\varphi_{xx}(\tau)$ 的付立叶变换象函数 $\Phi_{xx}(\omega)$ 描写信号平均功率的频谱密度，简称功率密度或频谱密度等。

四、特殊的随机过程

前面已经提到平稳随机过程和各态经历过程。下面应用相关函数的概念再介绍几种常见的随机过程。

1. 独立随机过程(白噪声过程) 如果系统的自相关函数具有如下形式：

$$\varphi_{xx}(\tau) = A\delta(\tau) \tag{1.44}$$

只要 $\tau\neq0$，就有 $\varphi_{xx}(\tau)=0$。可见，过程任何时刻的状态和其他所有时刻的状态是互不相关的。根据这一特点，这种过程被定名为独立随机过程。

将式(1.44)代入式(1.40)，可得

$$\Phi_{xx}(\omega) = A \tag{1.45}$$

因此，独立随机过程的功率频谱密度是恒定值。既然过程的频谱包

含所有频率，并且具有相同的强度，所以又称为**白色噪声过程**。

严格的白噪声是不存在的。因为如果这样，根据式(1.43)，将导致平均功率 P_x 趋向无穷大。在实际问题中，只要在所考察的范围内功率频谱密度 $\Phi_{xx}(\omega)$ 是常数，就可认为是白色噪声。相应的过程就称为独立随机过程。

既然对不同时刻的随机变量 x 的取值是互相独立的，那么联合概率密度可以写成：

$$p[x(t_1),t_1;x(t_2),t_2;\cdots;x(t_n),t_n]$$
$$= p[x(t_1),t_1]p[x(t_2),t_2]\cdots p[x(t_n),t_n] \qquad (1.46)$$

上式可知，独立随机过程的一阶概率密度函数包含了该过程的全部统计信息。

但是连续时间的独立随机过程在物理上是不存在的。因为当 t_1 和 t_2 充分接近时，有理由认为 $x(t_2)$ 的统计信息将依赖于 $x(t_1)$（设 $t_2>t_1$）。所以连续时间的独立随机过程只能认为是一种理想化的过程。它使数学处理简单方便。而独立的随机序列在物理上是存在的。例如在数字控制系统中，只要采样间隔足够长，各时刻的采样值就可以互不相关。同样，独立随机序列又称为白色噪声序列。

2. **马尔可夫过程**　式(1.46)表明，对于独立随机过程，任何一个时刻的状态既与过去时刻无关也与将来时刻无关。如果一个随机过程现在时刻($t=t_k$)所处状态 $x=x(t_k)$ 的概率只与过去某个时刻($t=t_{k-1}$)所处的状态 $x=x(t_{k-1})$ 有关，而与过去那个时刻以前($t_2<t_{k-1}$)的状态无关，这样的过程称为**马尔可夫**(Markov)**过程**。

设 $t_1<t_2<\cdots<t_k$，并且 $p\{x(t_k)|x(t_{k-1}),x(t_{k-2}),\cdots,x(t_1)\}$ 表示过去各个时刻 $\boldsymbol{X}$ 的取值分别为 $x(t_1),\cdots,x(t_{k-1})$ 的条件下现在时刻 x 取 $x(t_k)$ 的概率密度，而 $p\{x(t_k)|x(t_{k-1})\}$ 表示过去最邻近时刻 x 取 $x(t_{k-1})$ 条件下，现在时刻 x 取 $x(t_k)$ 值的概率，那么马尔

可夫过程可以表示为

$$p\{x(t_k)|x(t_{k-1}),x(t_{k-2}),\cdots,x(t_1)\} = p\{x(t_k)|x(t_{k-1})\} \tag{1.47}$$

马尔可夫过程强调了某一时刻所处的状态只受前一个最邻近时刻的影响，而与更早的时刻无关。过程的这一性质通常称为**马尔可夫性**。

由于式(1.47)，我们可以推出

$$\begin{aligned} & p\{x(t_k),x(t_{k-1}),\cdots,x(t_1)\} \\ & = p\{x(t_k)|x(t_{k-1}),\cdots,x(t_1)\}\cdot p\{x(t_{k-1}),\cdots,x(t_1)\} \\ & = p\{x(t_k)|x(t_{k-1})\}\cdot p\{x(t_{k-1}),\cdots,x(t_1)\} \end{aligned}$$

如果将上式一直递推下去，可得

$$\begin{aligned} & p\{x(t_k),x(t_{k-1}),\cdots,x(t_1)\} \\ & = p\{x(t_k)|x(t_{k-1})\}\cdot p\{x(t_{k-1})|x(t_{k-2})\}\cdots p[x(t_1)] \end{aligned} \tag{1.48}$$

$p\{x(t_k)|x(t_{k-1})\}$称为**转移概率**。

和独立随机过程的问题一样，马尔可夫过程只对离散的随机序列才有准确的含义。

3. **高斯过程**　设 x 是一维随机变量，m 和 σ 分别为它的系综平均值和均方差，如果概率密度具有如下形式：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{1.49}$$

这样的概率分布称为**高斯分布**，相应的过程称为**高斯过程**。如果随机过程是平稳的，m 和 σ 与 t 无关，概率密度函数也不显含 t。

对于比较一般的情形，过程可以是不平稳的，并且随机变量是随机向量 $\boldsymbol{x}(t)$。这时高斯过程的概率密度函数具有如下形式：

$$p\{\boldsymbol{x}(t),t\} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{C}_x|}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T\boldsymbol{C}_x^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})\} \tag{1.50}$$

式中 $x(t)$ 是 n 维随机向量，$m(t)$ 是它的系综平均值，$C_x(t)$ 是它的协方差距阵。

这里介绍了三类随机过程。前两类即独立随机过程和马尔可夫过程是以过程的相关特性来分类的。而最后介绍的高斯过程则是以概率分布的具体形式来分类的。所以一个随机过程既可以是高斯过程又可以同时是独立随机过程等等。

§2 维纳滤波

维纳滤波讨论的是线性定常系统的噪声滤除问题*。它假定所考虑的随机过程是平稳的和各态经历的。这个理论是维纳于本世纪中叶为解决雷达信号所含的噪声问题而建立起来的，目前在信息处理中有着广泛的应用。

一、维纳滤波的提法

决定性的伺服系统也会出现噪声的干扰。但由于那些系统通常表现为低通滤波器，只要噪声频率足够高，噪声的滤除可以简单地通过校正系统的频率特性，改变通频带来解决。

如果系统有用信号与噪声有重迭的频带，所说的简单方法很难凑效。并且，由于噪声的随机性，有用信号也必须作为随机变量来处理。

假定理想的系统如图 2-1(a)所示，不含噪声。其传递函数为 $G_d(s)$，输入为 $u(t)$，理想的输出为 $y_d(t)$。如果实际的系统的输入端混入噪声 $n(t)$，实际输出 $y(t)$ 就会和理想输出 $y_d(t)$ 有较大的偏离。为了使噪声对输出的影响得到抑制，我们将传递函数 $G_d(s)$ 修正为 $G(s)$，如图 2-1(b)。如果 $G(s)$ 的构成能够充分抑制噪声对输

---

* N. Wiener: "The Extraploation, Interpolation and Smoothing of stationary Time Sieries", John Wiley & Sons, N. Y. (1948).

出的影响，那么 $y(t)$ 和 $y_d(t)$ 的偏差

$$e(t) = y(t) - y_d(t) \tag{2.1}$$

降至最小值。对于各态经历的平稳随机过程，用 $e(t)$ 的均方值最小来衡量，即要求

$$\overline{e^2(t)} = \min. \tag{2.2}$$

这个关系式也称作输出的最小方差条件。

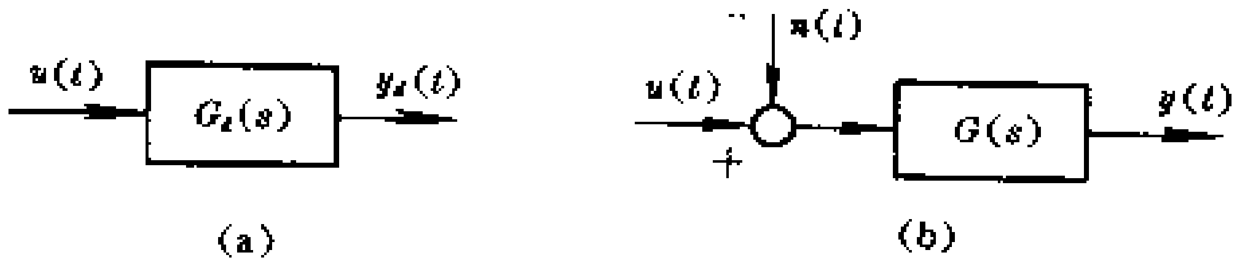


图 2-1　随机系统的噪声

图 2-2 表示所述的数学关系。$G_d(s)$ 是原来系统的理想传递函数。以此为参考求得修正后的实际输出与理想的无噪声干扰的输出之间的偏差，并使其最小。这是维纳为形象地推演实际传递函数 $G(s)$ 而建立的，称为**参考模型系统**。

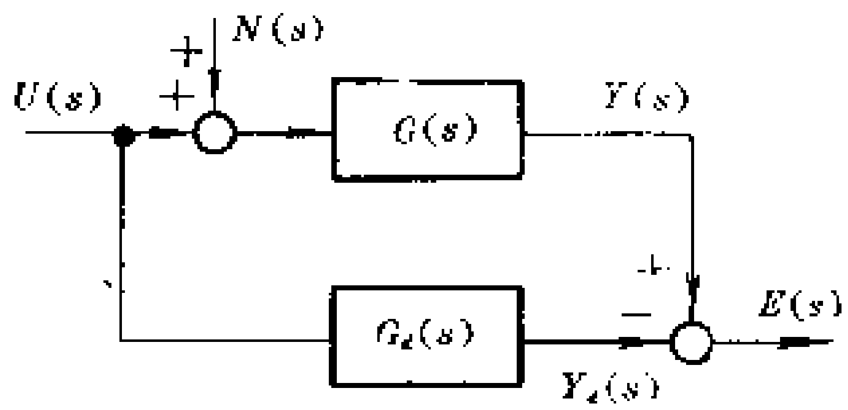


图 2-2　参考模型系统

注意到式(1.25)，有

$$\overline{e^2(t)} = \varphi_{ee}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ee}(j\omega)\mathrm{d}\omega \tag{2.3}$$

上式右边是 $\varphi_{ee}(0)$ 的付立叶展开式，$\Phi_{ee}(j\omega)$ 称为偏差信号 $e(t)$ 的功率频谱。为求出实现 $\overline{e^2(t)}$ 最小的条件，需要具体了解等式(2.3)的含义和功率频谱密度的表达式。

下面首先探讨功率频谱的传递特性。

二、功率频谱的传递

1. 随机的输入信号和输出信号的相关性 对于图 2-3 所示的单输入单输出系统，如果输入一个完全确定的输入变量 $x(t)$，则可以得相应的确定的输出变量 $y(t)$。这时，$y(t)$ 与 $x(t)$ 的关系可以表示为

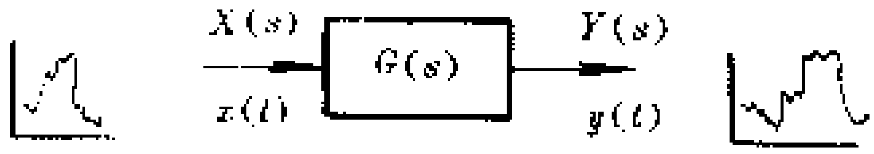


图 2-3 单输入单输出的随机系统

$$Y(s)=G(s)X(s) \tag{2.4}$$

但是对于随机系统，输入变量和输出变量都既不是确定的时间函数，也不能准确的重复。我们不能根据式(2.4)简单地把握输出和输入的决定性关系，而只能把握两者的统计关系。

根据定义，$x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数可以写成

$$\Phi_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{2.5}$$

由于式(2.4)，又有

$$\begin{aligned}y(t+\tau)&=g(t+\tau)*x(t+\tau)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(\sigma)x(t+\tau-\sigma)\mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{2.6}$$

将式(2.6)代入式(2.5)可得

$$\Phi_{xy}(\tau)=g(\tau)*\Phi_{xx}(\tau) \tag{2.7}$$

对上式进行付立叶变换，可得

$$\Phi_{xy}(j\omega)=G(j\omega)\Phi_{xx}(j\omega) \tag{2.8}$$

同理

$$\Phi_{yy}(j\omega)=G(j\omega)\Phi_{yx}(j\omega) \tag{2.9}$$

2. 功率频谱传递函数 由式(2.8)和(2.9)可以总结出一个规律：当功率频谱密度的第二个足标由 x 变为 y 时需要乘以传递因子 $G(j\omega)$。

注意到式(1.32)和式(1.40)，

$$\Phi_{yx}(j\omega)=\Phi_{xy}(-j\omega)=G(-j\omega)\Phi_{xx}(-j\omega) \quad (2.10)$$

或

$$\Phi_{yx}(j\omega)=G(-j\omega)\Phi_{xx}(j\omega) \quad (2.11)$$

可见频谱密度第一个足标改变时的传递因子是 $G(-j\omega)$。

将式(2.11)代入式(2.9)得

$$\Phi_{yy}(j\omega)=G(-j\omega)G(j\omega)\Phi_{xx}(j\omega) \quad (2.12)$$

这就是希望求得的输出信号和输入信号之间的功率频谱密度关系。据此，图 2-3 所示系统的功率频谱的传递过程可以由图 2-4 来描述。

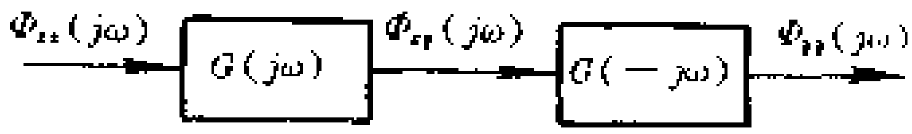


图 2-4　功率频谱的传递

令

$$T(j\omega)=G(j\omega)G(-j\omega) \quad (2.13)$$

则式(2.12)可变为

$$\Phi_{yy}(j\omega)=T(j\omega)\Phi_{xx}(j\omega) \quad (2.14)$$

$T(j\omega)$称为**功率频谱传递函数**。

现在讨论功率频谱传递函数 $T(j\omega)$和信号频谱传递函数(即频率特性)$G(j\omega)$之间的关系。在研究反馈控制时曾指出，系统频率特性 $G(j\omega)$的模$|G(j\omega)|$表示系统振幅传递特性。它的幅角$\angle G(j\omega)$表示系统的相位传递特性。据式(2.13)，有

$$T(j\omega)=|G(j\omega)|^2 \quad (2.15)$$

功率频谱传递函数 $T(j\omega)$只决定于系统的振幅特性而与相位特性无关. 因此，当我们只能用功率频谱的传递函数来研究系统的行为时，就会失去系统的相位信息。虽然根据信号频谱传递函数 $G(j\omega)$可以唯一决定功率频谱传递函数 $T(j\omega)$。但反过来，由功率频谱传递函数 $T(j\omega)$去决定信号频谱传递函数 $G(j\omega)$就不是唯一的了。

固然可以应用一些原则，如函数的解析性要求等，对这一过程作出限制*。但仍然会带有任意性。

3. **白噪声的传递** 设系统的信号传递函数为 $G(s)$，输入 $n(t)$ 为幅度等于 1 的白色噪声。于是

$$\varphi_{xx}(\tau)=\delta(\tau) \quad 且 \quad \Phi_{xx}(j\omega)=1$$

代入式(2.12)，可得

$$\Phi_{yy}(j\omega)=G(j\omega)G(-j\omega) \tag{2.16}$$

可见白噪声通过一般线性系统之后变成了有色信号。其输出频谱密度等于系统的功率频谱传递函数。反过来看，白噪声是确定随机系统功率频谱传递函数的方便的检测信号之一。任意功率频谱密度 $\Phi_{yy}(j\omega)$ 都可看成是由白色噪声输入到功率频谱传递函数为

$$T(j\omega)=\Phi_{yy}(j\omega) \tag{2.17}$$

的系统而得到的。图 2-5(a)表示确定性信号(单位脉冲输入)的传递过程；图 2-5(b)则表示随机的白色噪声的功率频谱传递过程。

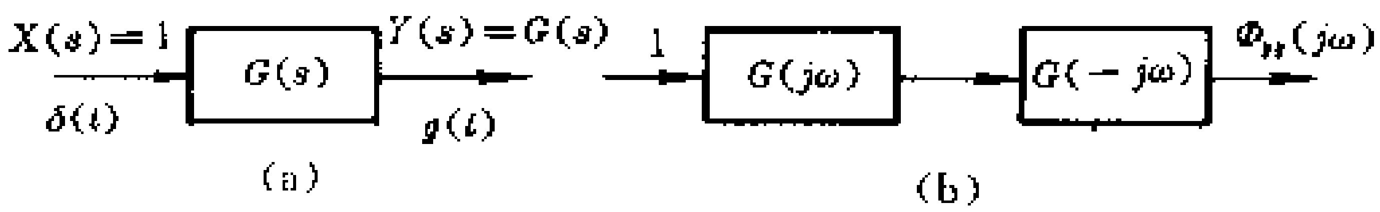


图 2-5 信号的传递与功率频谱的传递

如果由白噪声检测出来的功率频谱密度 $\Phi_{yy}(j\omega)$ 可以分解为式(2.16)的形式。由于分解的任意性，为区别起见，将这样的信号频谱分量 $G(j\omega)$ 记作 $\Psi_{yy}(j\omega)$，于是

$$\Phi_{yy}=\Psi_{yy}(j\omega)\Psi_{yy}(-j\omega) \tag{2.18}$$

如将 $\Psi_{yy}(j\omega)$ 和 $\Psi_{yy}(-j\omega)$ 分别记作 $\Psi_{yy}^{+}(j\omega)\Psi_{yy}^{-}(j\omega)$ 则有

$$\Phi_{yy}=\Psi_{yy}^{+}(j\omega)\Psi_{yy}^{-}(j\omega) \tag{2.19}$$

---

* 维纳对此作过详细的讨论，见钱学森、宋健：《工程控制论》，科学出版社，1980。

假定 $\Psi_{yy}^{+}(j\omega)$对应于 $G(j\omega)$，于是 $\Psi_{yy}^{+}(s)$对应于由白噪声产生色噪声 $\Phi_{yy}(j\omega)$的传递函数。那么当功率频谱密度为 $\Phi_{yy}(j\omega)$的信号通过以 $1/\Psi_{yy}^{+}(s)$为传递函数的系统之后所得的输出信号的功率频谱则为 1。这是因为

$$\frac{1}{\Psi_{yy}^{+}(j\omega)}\frac{1}{\Psi^{+}(-j\omega)}\Phi_{yy}(j\omega)=1 \tag{2.20}$$

上式考虑了式(2.18)。图 2-6 表示图 2—5(b)的逆过程。

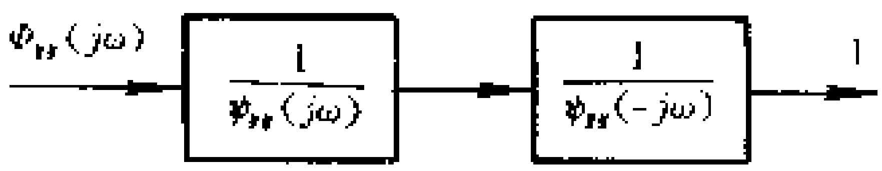


图 2-6 逆滤波器

这个能够将有色频谱变为白色频谱的系统称为逆滤波器。

三、维纳滤波

现在回过来讨论图 2-2 表示的参考模型的功率频谱的传递。图中各变量在复频域的数学关系为

$$Y(s)=G(s)[U(s)+N(s)] \tag{2.21}$$

$$Y_d(s)=G_d(s)U(s) \tag{2.22}$$

于是

$$\begin{aligned}E(s)&=Y(s)-Y_d(s)\\&=[G(s)-G_d(s)]U(s)+G(s)N(s)\end{aligned} \tag{2.23}$$

假定噪声信号 $n(t)$和输入信号 $u(t)$互不相关，于是

$$\Phi_{nu}(t)=0$$

偏差信号的功率频谱传递关系为

$$\Phi_{ee}(j\omega)=|G(j\omega)-G_d(j\omega)|^2\Phi_{uu}(j\omega)+|G(j\omega)|^2\Phi_{nn}(j\omega) \tag{2.24}$$

注意到，$y(t)$和 $y_d(t)$的均方差，即 $e(t)$的平均功率为

$$\overline{e^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ee}(j\omega)\mathrm{d}\omega \tag{2.25}$$

要使最小方差条件,式(2.2),得到满足,只要上式的被积函数取最小值。为求得 $\Phi_{ee}(j\omega)$ 的最小值,先将式(2.24)右边展开,再配完全平方,可得

$$\begin{aligned}
&[G(j\omega) - G_d(j\omega)][G(-j\omega) - G_d(-j\omega)]\Phi_{uu}(j\omega) \\
&\quad + G(j\omega)G(-j\omega)\Phi_{nn}(j\omega) \\
&= G(j\omega)G_d(-j\omega)[\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)] \\
&\quad - [G(j\omega)G_d(-j\omega) + G(-j\omega)G_d(j\omega)]\Phi_{uu}(j\omega) \\
&\quad + G_d(j\omega)G_d(-j\omega)\Phi_{uu}(j\omega) \\
&= [\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)]\{G(j\omega)G_d(-j\omega) \\
&\quad - [G(j\omega)G_d(-j\omega) + G(-j\omega)G_d(j\omega)]\frac{\Phi_{uu}(j\omega)}{\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)}\} \\
&\quad + G_d(j\omega)G_d(-j\omega)\Phi_{uu}(j\omega) \\
&= [\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)]\left[G(j\omega) - G_d(j\omega)\frac{\Phi_{uu}(j\omega)}{\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)}\right] \\
&\quad \cdot \left[G(-j\omega) - G_d(-j\omega)\frac{\Phi_{uu}(j\omega)}{\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)}\right] \\
&\quad + G_d(j\omega)G_d(-j\omega)\left[\Phi_{uu}(j\omega) - \frac{\Phi_{uu}^2(j\omega)}{\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)}\right]
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&|G(j\omega) - G_d(j\omega)|^2\Phi_{uu}(j\omega) + |G(j\omega)|^2\Phi_{nn}(j\omega) \\
&= [\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)] \cdot \left|G(j\omega) - G_d(j\omega)\frac{\Phi_{uu}(j\omega)}{\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)}\right|^2 \\
&\quad + \frac{\Phi_{uu}(j\omega)\Phi_{nn}(j\omega)}{\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)}|G_d(j\omega)|^2
\end{aligned} \tag{2.26}$$

上式右边第二项恒为正,且与 $G(j\omega)$ 无关. 因此,要使式(2.25)所表示的 $\overline{e^2(t)}$ 取最小值,只要式(2.26)右边第一项为零. 这时

$$G(j\omega) = G_d(j\omega)\frac{\Phi_{uu}}{\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)} \tag{2.27}$$

将上式代入式(2.26)，从而使式(2.25)变为

$$\Phi_{ee}(j\omega) = \frac{\Phi_{uu}(j\omega)\cdot\Phi_{nn}(j\omega)}{\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)}|G_d(j\omega)|^2 \tag{2.28}$$

这是输出偏差 $e(t)$ 的功率频谱密度的最小值。由此可见，如果取

$$G(s) = G_d(s)\cdot\frac{\Phi_{uu}(s)}{\Phi_{uu}(s) + \Phi_{nn}(s)} \tag{2.29}$$

那么根据前面的推演，应当可使最小方差条件(2.2)得到满足，并且

$$\overline{e^2_{\min}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_{uu}(j\omega)\Phi_{nn}(j\omega)}{\Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)}|G_d(j\omega)|^2 d\omega \tag{2.30}$$

由式(2.29)构成的系统如图 2-7 所示。这是一个推想的维纳滤波器。如果这是可以实现的，那么等式(2.27)成立，最后使输出的最小方差条件(2.2)成立.

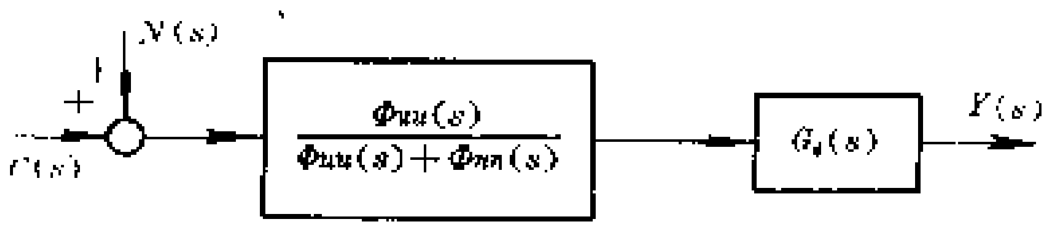


图 2-7 可反演系统维纳滤波器

问题在于如何构造形如式(2.29)那样的传递函数。因为它含有 $\Phi_{uu}(s)$，$\Phi_{nn}(s)$ 等项，是和功率频谱 $\Phi_{uu}(j\omega)$、$\Phi_{nn}(j\omega)$ 等相联系的。

根据前面的讨论，有色的功率频谱可以看成白色的功率频谱通过某个系统〔假定传递函数为 $W(s)$〕的结果，类似于图 2-5(b) 所示。按照式(2.16)，输出功率频谱可以写成两个对称因子的乘积：

$$\Phi_{yy}(j\omega) = W(j\omega)W(-j\omega)$$

可以想像，如果系统的传递函数包含有由功率频谱密度函数 $\Phi_{yy}(j\omega)$ 通过 $j\omega = s$ 的替换来构成，这样的传递函数必然既包含有 W

(s)，也包含有 $W(-s)$ 的因子。前者是假定物理上存在的系统。后者即 $W(-s)$ 能否实现则是没有作过讨论的。恰恰由于这一点，引起了物理上的佯谬。

前面还指出，用功率频谱密度来描写信号的传递，其结果只能描写信号幅度的变化，其相位因子是不受限制的，因而是可以任意的，如式(2.15)。因此，要使频谱密度函数关系(2.27)成立所对应的传递函数不是唯一的。下面引入新的原则，对式(2.29)进行修正。

四、时间的不可逆性

前面曾经指出，控制系统是一种耗散系统。在控制系统中所发生的过程是不可逆过程。因此，控制系统的行为在时间上是不能反演的。这和平衡态物理过程存在本质的区别。这种观点首先由维纳在他的著名论著《控制论》中提出来，并且也和近年来普利戈金($I.Prigogine$)所阐述的时间之矢的概念是一脉相承的。事实上，真实的物理过程是非平衡的不可逆过程。而可逆的平衡过程只是某些实际过程的近似。时间不可逆性从根本上说是确立物理过程因果关系的准则。

后面应用这个原则来解决维纳滤波器的传递函数的实现问题。

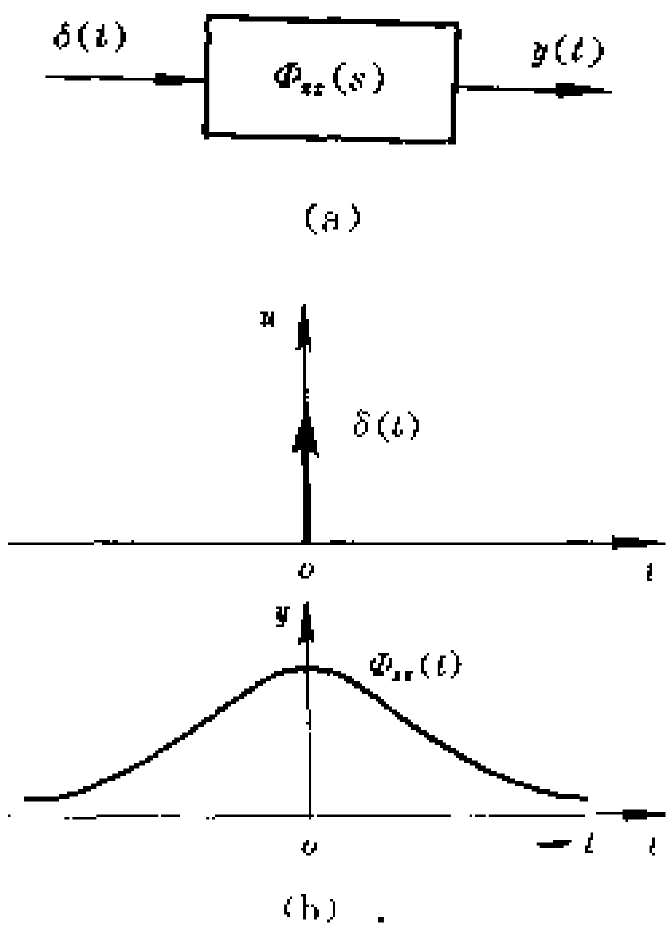


图 2-8 一个假想系统

1. 不可反演的传递函数 图 2-8(a)是一个以 $\Phi_{xx}(s)$ 为传递函数的假想系统。现在分析它的单位脉冲响应。

系统 $\Phi_{xx}(s)$ 的单位脉冲响应为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[\Phi_{xx}(s)]$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\Phi_{xx}(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

如果令 $s=j\omega$，则有

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{xx}(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = \varphi_{xx}(t) \tag{2.31}$$

根据自相关函数的偶函数特性，有

$$y(t) = y(-t)$$

这样的输出响应关于 $t=0$ 是对称的。或者说关于时间是可以反演的。这不符合前面提到的耗散系统所特有的非平衡演化特征。其起因就和 $\Phi_{xx}(s)$ 由两个对称因子构成有关。

为了使由图 2-8(a)构成的系统的单位脉冲响应符合时间过程不可逆原则，必须有

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ \Phi_{xx}(t) & t > 0 \end{cases} \tag{2.32}$$

注意到单位阶跃函数

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

式(2.32)也可写成

$$y(t) = \Phi_{xx}(t)\cdot 1(t) = \mathscr{L}^{-1}[\Phi_{xx}(s)]\cdot 1(t) \tag{2.34}$$

如果 $W(s)$ 这样构成，即它能够使由式(2.34)表示的输出信号 $y(t)$ 是它的单位脉冲响应，于是应当有

$$W(s) = \mathscr{L}\{\mathscr{L}^{-1}[\Phi_{xx}(s)]\cdot 1(t)\} \tag{2.35}$$

上式是式(2.34)的拉普拉斯变换。可以看出，如式(2.35)构成的传递函数，虽然也包含 $\Phi_{xx}(s)$，但它的单位脉冲响应可以满足时间不可逆原则。应当强调指出，这里只讨论了单位脉冲输入的情形。其他输入条件下的结果如何并不清楚。尽管如此，我们仍然可以利用由单位脉冲输入这一特点所得到的启示去改造由式(2.29)所构成的传递函数

2. **可实现的维纳滤波器** 对于由图 2-2 所示的参考模型系统，设

$$i(t)=u(t)+n(t) \tag{2.36}$$

于是相应的频谱密度有

$$\Phi_{ii}(j\omega)=\Phi_{uu}(j\omega)+\Phi_{nn}(j\omega) \tag{2.37}$$

因而式(2.29)可写为

$$G(s)=G_d(s)\frac{\Phi_{nn}(s)}{\Phi_{ii}(s)} \tag{2.38}$$

假定 $\Phi_{ii}(s)$ 可分解为两个对称因子：

$$\Phi_{ii}(s)=\Psi_{ii}(s)\Psi_{ii}(-s)$$

或者

$$\Phi_{ii}(s)=\Psi_{ii}^{+}(s)\Psi_{ii}^{-}(s) \tag{2.39}$$

上面考虑了式(2.18)和(2.19)所讨论的符号标记方法。

假定 $\Psi_{ii}^{+}(s)$ 是物理上可实现的信号传递函数，于是将式(2.38)改写为

$$G(s)=\frac{1}{\Psi_{ii}^{+}(s)}\left[G_d(s)\frac{\Phi_{nn}(s)}{\Psi_{ii}^{-}(s)}\right] \tag{2.40}$$

根据式(2.20)，上式右边第一个因子 $1/\Psi_{ii}^{+}(s)$ 是随机输入信号 $i(t)$ 的逆滤波器，即将 $i(t)$ 变为白噪声 $W(t)$。图 2-9 描述了以式(2.40)为传递函数系统的信号传输过程。为了方便起见，将式(2.40)右边第二个因子记作

$$G_2(s)=G_d(s)\frac{\Phi_{nn}(s)}{\Phi_{ii}^{-}(s)} \tag{2.41}$$

注意到 $G_2(s)$ 的输入信号是白噪声，也就是独立随机过程。它看以看成连续不断的互不相关的脉冲列构成。这个脉冲列显然一定包含出现在时刻 $t=0$ 的脉冲。如果不计及脉冲幅度，这个脉冲一定可以用 $\delta(t)$ 来表示。很明显图 2-9 所示的系统的第二部分〔表示为 $G_2(s)$〕包含了物理上不可实现的因素。要使 $G_2(s)$ 关于白噪

声的响应在物理上是可实现，那么至少它对 $\delta(t)$ 的响应必须满足时间不可逆原则。为此，式(2.41)应该改写为

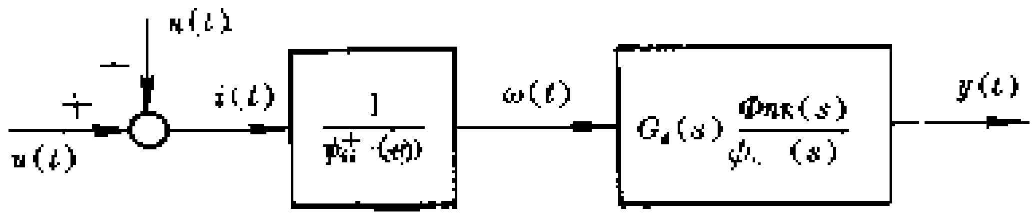


图 2-9　包含逆滤波器的信号传输过程

$$G_2(s) = \mathscr{L}\{\mathscr{L}^{-1}[G_d(s)\Phi_{nn}(s)/\Psi_{ii}^{-}(s)]\cdot 1(t)\} \quad (2.42)$$

联合因子 $1/\Psi_{ii}^{+}(s)$，可得

$$G(s) = \frac{1}{\Psi_{ii}^{+}(s)}\mathscr{L}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[G_d(s)\frac{\Phi_{nn}(s)}{\Psi_{ii}^{-}(s)}\right]\cdot 1(t)\right\} \quad (2.43)$$

这是物理上可实现的维纳滤波器。

最后应当指出，推导过程中的关键性传递函数表达式(2.29)是从频率特性函数表达式(2.27)以代换 $j\omega=s$ 进行形式上推广的结果。要特别引起注意的是：式(2.27)是付立叶变换的象函数，而式(2.29)及以后诸式如式(2.40)和(2.43)等则是拉普拉斯变换的象函数表达式。付立叶变换的原函数的定义域是在整个时间轴($-\infty,+\infty$)上；而原始意义上的拉普拉斯变换(如第二章所述)则定义于时间正半轴($0,+\infty$)上。为了使两者的定义域保持一致，特别是为了使拉普拉斯变换也能应用于定义在整个时间轴上的相关函数，对拉普拉斯变换需作推广，使它能够应用于在($-\infty,+\infty$)上定义的原函数。这种拉普拉斯变换称为双边拉普拉斯变换。由于篇幅所限，具体内容从略。但是本节中式(2.29)及以后各式所涉及的拉普拉斯变换都应理解为双边拉普拉斯变换。

〔例 1〕在图 2-2 中，$G_d(s)=1$，$\Phi_{uu}(j\omega)=0.1/(0.09+\omega^2)$，$\Phi_{nn}(j\omega)=1/(1+\omega^2)$，试求出最优线性滤波器的传递函数 $G(s)$。

〔解〕

$$\Phi_{ii}(j\omega) = \Phi_{uu}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega)$$

$$= \frac{0.1}{0.09+\omega^2} + \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$=\frac{0.19+1.1\omega^2}{(0.09+\omega^2)(1-\omega^2)}$$

于是时间可反演的维纳滤波器的传递函数 $G_{rev}(s)$ 为

$$G_{rev}(s)=G_d(s)\frac{\Phi_{uu}(s)}{\Phi_{ii}(s)}$$

$$=\frac{\dfrac{0.1}{0.09-s^2}}{\dfrac{0.19-1.1s^2}{(0.09-s^2)(1-s^2)}}$$

$$=0.1(1-s^2)/(0.19-s^2)$$

可以看出，为了求得物理上可实现的传递函数(关于时间不可逆的维纳滤波器)，需要应用式(2.43)。这会涉及到双边拉普拉斯变换和求留数的过程。这里只列出结果：

$$G(s)=0.165\frac{s+1}{s+0.416}$$

维纳滤波是维纳在研究火炮控制时为了滤除雷达接收信号中所包含的噪声提出来的。事实上，各种微弱信号的探测之所以受到限制，常常是因为噪声的干扰不能得到有效的滤除。所以，维纳滤波不仅在雷达信号接收，同时在卫星遥感、天体信号的接收，以致图象信息处理上有着广泛的应用。在工业实时控制的采样过程也需要维纳滤波器去抑制噪声信号。

应当指出，由于维纳过程是一种平稳随机过程，维纳滤波也只能适用于平稳随机过程的信号处理，对于非平稳随机过程，卡尔曼提出了新的的滤波方案。

§3 卡尔曼滤波

如果让维纳滤波中参考模型的传递函数 $G_d(s)=1$，则维纳滤波器等价于最优的输出调节器。其性能指标是使输出变量和输入

变量的方差统计平均值最小。维纳滤波器以改变系统结构参数达到最优控制。卡尔曼把维纳的工作推向更一般的情形*。首先它的讨论对象是最优状态调节器，系统的状态通过输出变量的观测值来估计。其次，它以修正控制变量实现最优估计。第三，对变量的随机性不局限于平稳随机过程。由于卡尔曼滤波的中心问题是通过系统输出变量来估计内部状态，因此所讨论的系统必须是可观测的。

一、卡尔曼滤波的提法

设状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 和输出向量 $\boldsymbol{y}(t)$ 分别是 n 维和 m 维的随机向量（$\boldsymbol{y}(t)$ 又称量测向量），它们分别满足下列方程：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{w}(t) \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t) \tag{3.2}$$

式中：

$\boldsymbol{A}(t)$—$(n\times n)$系统距阵；

$\boldsymbol{C}(t)$—$(m\times n)$输出距阵，又称量测距阵；

$\boldsymbol{w}(t)$—模型噪声向量，n 维高斯白噪声；

$\boldsymbol{v}(t)$—量测噪声向量，m 维高斯白噪声。

为简化讨论，状态方程(3.1)中暂时没有考虑控制变量 $\boldsymbol{u}(t)$ 的作用。

对于噪声向量 $\boldsymbol{w}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 作如下假定：

$$E[\boldsymbol{w}(t)] = 0 \tag{3.3}$$

$$E[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^T(\tau)] = \boldsymbol{Q}(t)\delta(t-\tau) \tag{3.4}$$

$$E[\boldsymbol{v}(t)] = 0 \tag{3.5}$$

$$E[\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{v}^T(\tau)] = \boldsymbol{R}(t)\delta(t-\tau) \tag{3.6}$$

$$E[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{v}^T(\tau)] = 0 \tag{3.7}$$

上述假定：一切 $t,\tau>0$ 成立，其中

---

* *R. E. Kalman*, *J. Basic Engr.* (*ASME Trans.*) 82*D*, 35(1960).

$Q(t)$—模型噪声协方差矩阵，是$(n\times n)$对称非负定矩阵；

$R(t)$—量测噪声协方差矩阵，是$(m\times m)$正定矩阵。式(3.7)表示两种噪声各自是独立的。

对于状态向量 $x(t)$及其初值 $x(t_0)$作如下假定：

(1)$x(t)$在任意时刻都是高斯型随机向量且

$$E[x(t_0)] = m_0 \tag{3.8}$$

(2)$x(t_0)$和 $w(t)$在 $t\geqslant t_0$ 时是互不相关的；

$$E[x(t_0)w^T(t)] = 0 \tag{3.9}$$

(3)$x(t_0)$和 $v(t)$在 $t\geqslant t_0$ 时是互不相关的：

$$E[x(t_0)v^T(t)] = 0 \tag{3.10}$$

上述假定表明，某时刻 t_0 的状态向量 $x(t_0)$只受该时刻之前的噪声的影响，而与同时刻以及该时刻之后的噪声无关。

假定在某个时间间隔内已经求得必要的量测数据 $y(t)$，并且能够由此估计出某个时刻 t 的状态向量。这样估算出的状态向量称作**估计值**，记作 $\hat{x}(t)$。假定 $\hat{x}(t)$满足下列条件：

(1)$\hat{x}(t)$是无偏的，即

$$E[\hat{x}(t)] = E[x(t)] \tag{3.11}$$

(2)$x(t)$与 $\hat{x}(t)$的误差均方值取极小值，即

$$E\{[x(t) - \hat{x}(t)]^T[x(t) - \hat{x}(t)]\} = \min. \tag{3.12}$$

则称估计值 $\hat{x}(t)$是 $x(t)$的极小方差无偏估计。$x(t)$的这种估计，由于能够最大限度地消除噪声的干扰，所以又称滤波。通常称为**卡尔曼滤波**。

二、状态估计

1. **估计表达式** 如果取状态向量的无限系综的统计平均值(数学期望值)作为估计值：

$$\hat{x}(t) = E[x(t)] \tag{3.13}$$

那么这样的估计满足式(3.11)是自明的。并且由于 $x(t)$是高斯型随机向量，式(3.12)也被满足。换言之，任意时刻 t，状态向量 $x(t)$

的数学期望值 $E[x(t)]$ 是 $x(t)$ 的一个极小方差无偏估计。

对式(3.1)和(3.2)两边取平均值，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E[x(t)] = A(t)E[x(t)] \tag{3.14}$$

$$E[y(t)] = C(t)E(x(t)] \tag{3.15}$$

上面两式推导过程中注意了取数学期望是独立于时间 t 的线性运算，并且还考虑了式(3.3)和(3.5)，即噪声向量 $w(t)$ 和 $v(t)$ 的平均值为零。

由式(3.14)可知，只要给出 $x(t)$ 初始时刻的平均值 $E[x(t_0)]$，就可以预言以后各时刻的平均值 $E[x(t)]$。这样一来，问题似乎非常简单：只要给出 $x(t_0)$ 的精确的初始分布，就可将它的平均值 $E[x(t_0)]$ 作为初始估计 $x(t_0)$，从而根据式(3.14)求出所有时刻的极小方差无偏估计 $x(t)$，并且根据式(3.15)还可确定 $y(t)$ 的无偏估计。将 $x(t)$ 和 $y(t)$ 代替 $E[x(t)]$ 和 $E[y(t)]$，方程(3.14)和(3.15)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{x}(t) = A(t)\hat{x}(t) \tag{3.16}$$

$$\hat{y}(t) = C(t)\hat{x}(t) \tag{3.17}$$

2. **估计修正方程**　但是实际问题并不这样简单。这是因为一个精确的初始分布 $x(t_0)$，或者准确的均值 $E[x(t)]$，实际上是得不到的。任何实际系综是由有限成员构成。由实际系综得到的 $x(t_0)$ 分布以及客观存在的平均值 $E[\hat{x}(t_0)]$ 只能是理想分布的近似。特别是对于现在所讨论的问题，随机状态向量的初始估计 $\hat{x}(t_0)$ 只能依据输出向量 $y(t)$ 的观测值来确定。由于测量次数有限，并且不可避免地受到噪声 $w(t)$ 和 $v(t)$ 的干扰，这样得到的初始估计的准确性是十分有限的。从这样的初始估计出发，根据式(3.16)去预言以后的估计值 $\hat{x}(t)$ 只能是一种粗略的近似。我们暂且把它当作零阶近似

另一方面，我们也可以按照式(3.17)计算出时刻 t 的输出向量的粗略估计值 $\hat{y}(t)$。假定在该时刻对输出向量作一次测量，为简化起见把测量值也计作 $y(t)$，那么输出向量测量值和估计值之差

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

一定包含了状态向量估计值 $x(t_0)$ 的估计误差信息。为了使时刻 t $(>t_0)$ 的估计值预言得更准确，我们应用输出向量的估计误差 $\tilde{y}(t)$ 对方程(3.16)进行一阶修正如下：

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - \hat{y}(t)] \tag{3.18}$$

式中 $\dot{\hat{x}}(t)$ 表示 $\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$，$(n\times m)$ 矩阵 $K(t)$ 是输出向量估计误差的修正权重，称为**增益矩阵**。

3. 估计误差　根据式(3.18)得到的估计值 $\hat{x}(t)$ 和实际值的误差记作 $\tilde{x}(t)$，为

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.19}$$

上式对时间的导数为

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \tag{3.20}$$

考虑(3.1)，(3.2)和(3.18)，得状态估计的误差方程为

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\tilde{x}(t) - K(t)v(t) + w(t) \tag{3.21}$$

上式的积分即为状态估计误差转移方程：

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t,t_0)\tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)[w(\tau) - K(\tau)v(\tau)]d\tau \tag{3.22}$$

式中 $(n\times n)$ 矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 为方程(3.21)规定的 $\tilde{x}(t)$ 的转移矩阵，满足

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = [A(t) - K(t)C(t)]\Phi(t,t_0) \tag{3.23}$$

$$\Phi(t,t_0) = I \tag{3.24}$$

综上所述，状态向量和输出向量的估计值是根据输出向量的测量值计算出来的，并且不断得到修正。它们的数学关系可以用方框图 3-1 表示。

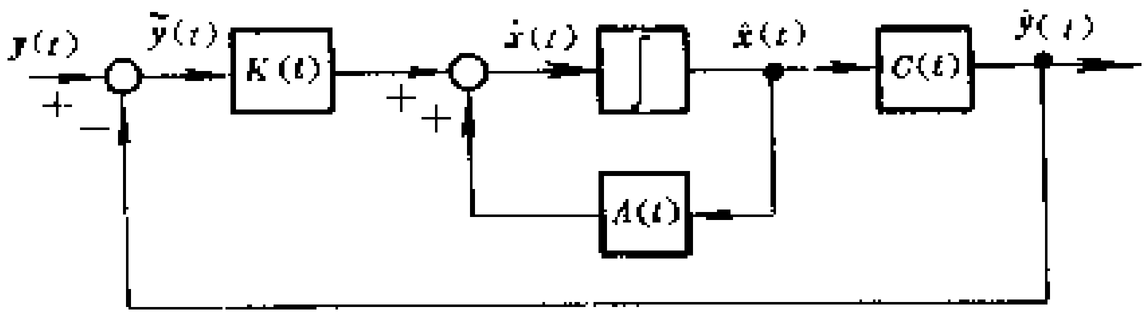


图 3-1　卡尔曼滤波器的示意方块图

4. Riccati 方程　适当选择增益矩阵 $\boldsymbol{K}(t)$，可使状态估计误差满足极小方差条件。设 $(n\times n)$ 矩阵 $\boldsymbol{P}(t)$ 为**估计误差协方差矩阵**：

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}^T(t)] \qquad (3.25)$$

于是式(3.12)可表示为

$$\boldsymbol{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}^T(t)\tilde{\boldsymbol{x}}(t)]=Tr_0\boldsymbol{P}(t)=\min. \qquad (3.26)$$

$Tr_0\boldsymbol{P}(t)$ 是距阵 $\boldsymbol{P}(t)$ 的迹，即 $\boldsymbol{P}(t)$ 的主对角线上各项之和。因此，只要

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}^T(t)]=\min. \qquad (3.27)$$

式(3.26)必成立。

注意到

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t)=\boldsymbol{E}[\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}^T(t)]+\boldsymbol{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}^T(t)] \qquad (3.28)$$

将式(3.21)和(3.22)代入上式，得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{P}}(t)=&\boldsymbol{P}(t)[\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{C}(t)]^T-\boldsymbol{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\boldsymbol{v}^T(t)]\boldsymbol{K}^T(t)\\&+\boldsymbol{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\boldsymbol{w}^T(t)]+[\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{C}(t)]\boldsymbol{P}(t)\\&-\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{E}[\boldsymbol{v}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}^T(t)]+\boldsymbol{E}[\boldsymbol{v}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}^T(t)]\end{aligned} \qquad (3.29)$$

注意式(3.22)以及式(3.3)—(3.7)对噪声 $\boldsymbol{w}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 所作的规定，可以证明

$$E[v(t)\tilde{x}^T(t)] = -\frac{1}{2}R(t)K^T(t) \tag{3.30}$$

$$E[w(t)\tilde{x}^T(t)] = \frac{1}{2}Q(t) \tag{3.31}$$

于是

$$\dot{P}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]P(t) + P(t)[A(t) - K(t)C(t)]^T + K(t)R(t)K^T(t) + Q(t) \tag{3.32}$$

5. **最优增益矩阵** 对上式两边取积分：

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} \{[A(\tau) - K(\tau)C(\tau)]P(\tau) + P(\tau)[A(\tau) - K(\tau)C(\tau)]^T + K(\tau)R(\tau)K^T(\tau) + Q(\tau)\}d\tau + P(t_0) \tag{3.33}$$

上式是 $P(t)$ 的积分方程。$P(t_0)$ 是 $P(t)$ 的初值矩阵。

由方程(3.33)可以看出，每个时刻($t \geqslant t_0$)$K(t)$的变更将引起 $P(t)$ 相应的变更。我们把这种变更用符号"δ"来表示，以区别于对时间的微分符号"d"。于是由式(3.33)，有

$$\delta P(t) = \int_{t_0}^{t} \{[A(\tau) - K(\tau)C(\tau)]\delta P(\tau) - \delta K(\tau)C(\tau)P(\tau) + \delta P(\tau)[A(\tau) - K(\tau)C(\tau)]^T - P(\tau)[\delta K(\tau)C(\tau)]^T + \delta K(\tau)R(\tau)K^T(\tau) - K(\tau)R(\tau)\delta K(\tau)\}d\tau \tag{3.34}$$

上式考虑了 $P(t_0)$，$A(t)$，$C(t)$，$R(t)$，$Q(t)$ 都与 $K(t)$ 的变更 $\delta K(t)$ 无关。如果每个时刻($t \geqslant t_0$)所选择的 $K(t)$ 都使 $P(t)$ 取极小值，则式(3.34)中所有的 $\delta P(t) = 0$，于是

$$\delta K(t)[R(t)K^T(t) - C(t)P(t)] + [K(t)R(t) - P(t)C^T(t)]\delta K^T(t) = 0$$

注意到式(3.6)和(3.25)，有 $R^T(t) = R(t)$，$P^T(t) = P(t)$。上式可改写成

$$[K(t)R(t)-P(t)C^T(t)]\delta K^T(t) + \{[K(t)R(t)-P(t)C^T(t)]\delta K^T(t)\}^T = 0 \tag{3.35}$$

于是

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t) \tag{3.36}$$

这就是我们寻求的**增益矩阵表达式**。

只要 $K(t)$ 满足式(3.36)，由方程(3.18)所得到的状态估计就能满足极小方差估计条件。由于在方程(3.36)中，$C(t)$ 和 $R(t)$ 是已知矩阵，因此只要能求出协方差矩阵 $P(t)$ 就能求得 $K(t)$。如果将式(3.36)代入式(3.32)，则

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + Q(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) \tag{3.37}$$

上式是一个 Riccati 型方程，称为最优线性滤波误差的协方差方程。

第三章已经指出，满足 Riccati 型方程的 $P(t)$ 可以应用数字计算机从初值 $P(t_0)$ 出发求得递推解。求出 $P(t)$ 之后，就可按照式(3.36)求出最优的增益矩阵 $K(t)$。由方程(3.18)求得的状态估计就能通过不断测量到的 $y(t)$ 值逐渐降低模型噪声和量测噪声的随机干扰，达到最接近于 $x(t)$ 真实值的 $\hat{x}(t)$。这就是卡尔曼滤波的最基本的内容。滤波过程的数学关系表示于图 3-2。

6. **总结** 所得到的卡尔曼滤波的基本关系式汇集如下：

(1)系统方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + w(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + v(t) \end{cases} \tag{3.38}$$

(2)估计方程

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - \hat{y}(t)] \\ y(t) = C(t)\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.39}$$

(3)增益方程

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t) \tag{3.40}$$

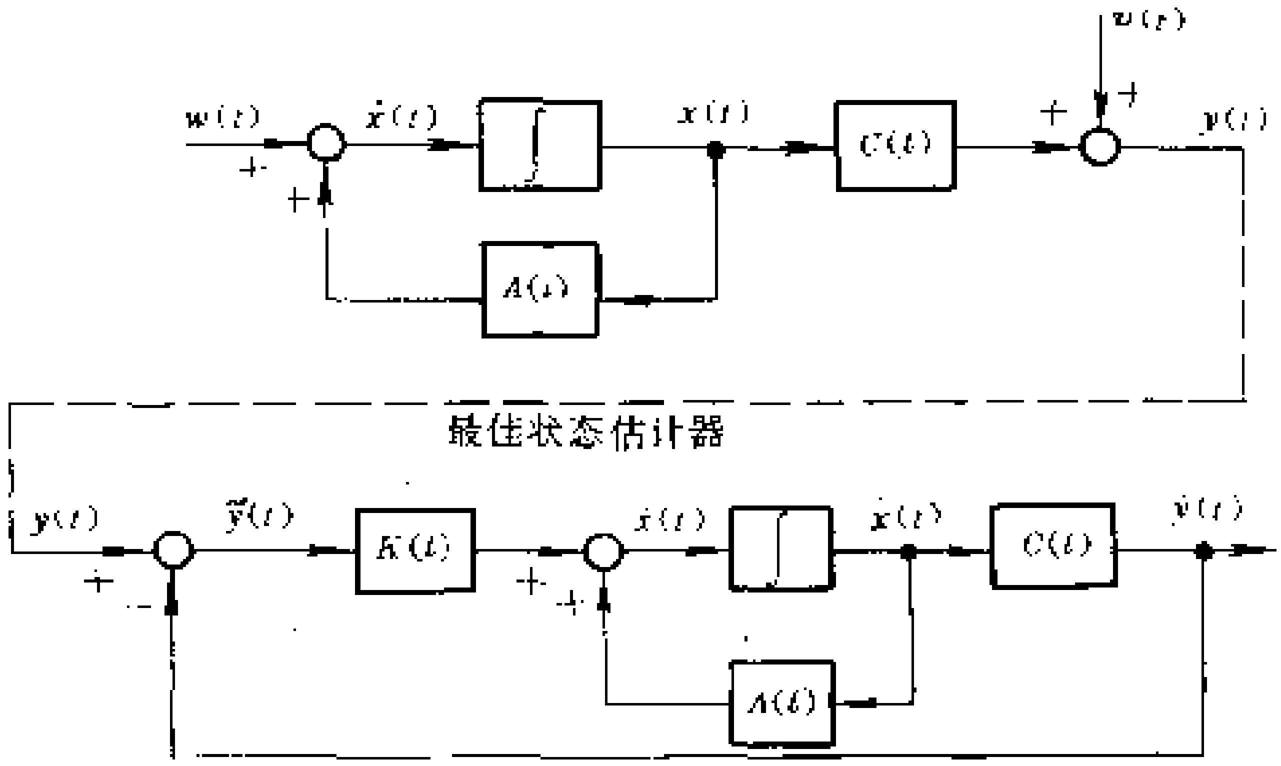


图 3-2 信息模型与最优状态估计器方块图

(4)估计误差协方差方程

$$
\begin{aligned}
\dot{P}(t) = & A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + Q(t) \\
& - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t)
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

有了上述方程，要求出状态估计值还需要事先给出初值 $P(t_0)$ 和 $\hat{x}(t_0)$。而

$$
\begin{aligned}
P(t_0) & = E\{[x(t_0) - \hat{x}(t_0)][x(t_0) - \hat{x}(t_0)]^T\} \\
& = E[\tilde{x}(t_0)\tilde{x}^T(t_0)]
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

所以确定初值 $P(t_0)$ 和 $\hat{x}(t_0)$ 可归结为确定 $\tilde{x}(t_0)$ 和 $\hat{x}(t_0)$。由于状态估计方程(3.18)中加上了估计误差的修正项，误差在估计过程中不断得到修正。只要测量次数和估计次数足够多，初始估计的误差对 $\hat{x}(t)$ 的影响不大。因此不妨对 $\hat{x}(t_0)$ 和 $\tilde{x}(t_0)$ 作粗略规定。也可以根据 t_0 附近对 $y(t)$ 作若干测量之后通过最小方差拟合求得。

最后指出，为了使读者易于理解基本内容，这里对推导过程作了简化，在数学严密性上确有欠缺。严格的推导通常是在离散形式下给出的，读者可以阅读关于随机控制的专门书籍。

〔例 1〕已知：系统的信息模型为

$$\dot{x}(t)=0, \quad \boldsymbol{E}\{x(t_0)\}=1, \quad \boldsymbol{P}\{t_0\}=10$$

观测模型为

$$y(t)=2x(t)+v(t), \quad \boldsymbol{E}\{v(t)\}=0,$$
$$E\{v(t)v(\tau)\}=1\cdot\delta(t-\tau)$$

试求最小误差方差滤波器，以便能从量测值 $y(t)$ 求出 $x(t)$。

〔解〕(1)与前面所列的公式相对照，可以看出：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=0, \quad \boldsymbol{C}=2, \boldsymbol{R}=1 \text{ 和 } \boldsymbol{P}(0)=10$$

(2)解误差协方差方程

$$\dot{\boldsymbol{P}}=-(\boldsymbol{P})(2)(1)(2)(\boldsymbol{P})=-4\boldsymbol{P}^2(t),$$
$$\boldsymbol{P}(0)=10$$

的解为

$$\boldsymbol{P}(t)=\frac{10}{1+40t}$$

(3)由式(3.40)，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}(t)&=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{C}^T(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\\&=\frac{10}{1+40t}(2)(1)=\frac{20}{1+40t}\end{aligned}$$

(4)其滤波方程为

$$\begin{aligned}\hat{x}&=\boldsymbol{A}(t)x(t)+\boldsymbol{K}(t)[y(t)-C(t)\hat{x}(t)]\\&=\frac{20}{1+40t}[y(t)-2\hat{x}(t)]\end{aligned}$$
$$\hat{x}(0)=\boldsymbol{E}\{x(0)\}=1$$

由上式所描述的关系，根据不同的量测数据 $y(t)$，便可以实时算出最优估计值 $\hat{x}(t)$。

卡尔曼滤波由于不受平稳随机过程的限制，用途相当广泛。在计算机控制的场合，凡是维纳滤波可以应用的，原则上都可以应用卡尔曼滤波。但是算法比较复杂。

还应指出，卡尔曼滤波不仅可以用于滤波，还可以用于预报。

因此，在天气预报方面也有广泛的应用。

§4 随机最优状态调节器

随机最优状态调节器是卡尔曼滤波的一个应用。

1. **确定性最优状态调节器问题回顾** 稳定性最优状态调节器已在第三章作过讨论，其要点如下：确定性系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(T) \tag{4.1}$$

最优性能指标为

$$J=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_f^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_f+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}_m(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{R}_m(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

最优控制方程为

$$\boldsymbol{u}^*(t)=\boldsymbol{K}_m(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{4.3}$$

反馈增益方程为

$$\boldsymbol{K}_m(t)=-\boldsymbol{R}_m^{-1}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{P}_m(t) \tag{4.4}$$

$P_m(t)$满足 Riccati 型方程

$$\dot{\boldsymbol{P}}_m(t)=-\boldsymbol{P}_m(t)\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{P}_m(t)-\boldsymbol{Q}_m(t)+\boldsymbol{P}_m(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}_m^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}_m(t) \tag{4.5}$$

最优状态调节器的方框图示于图 4-1。

比较图 3-1 和图 3-3，或者比较式(3.39)—(3.41)与式(4.1)—(4.5)的主要数学关系，卡尔曼滤波和最优状态调节器有着突出的相似性。系数矩阵 R,Q,K,P 与 R_m,Q_m,K_m,P_m 满足对应的数学关系。这种相似性与对应关系也称为**对偶性**。为避免混淆，在重新回顾确定性状态调节器时，有关的系数矩阵在这里都带有足标“m”。

在图 4-1 的状态反馈线上加“?”号是因为原则上只有输出量 $y(t)$才是可直接测量的。状态变量只能通过 $y(t)$的观测值计算出

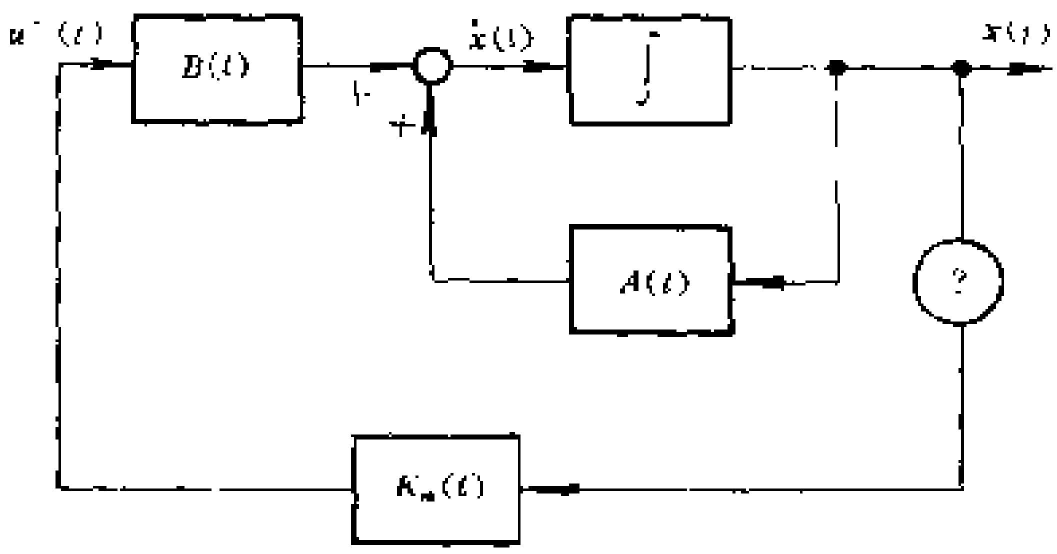


图 4-1　最优线性状态调节器

来。这就需要一个状态估计器。对于确定性系统，这个估计器可以按照第一章讨论可观测性时给出的原则构成。而对于随机系统则需要卡尔曼滤波器。它一方面根据 $y(t)$ 的观测值计算状态估计值，另一方面又能对噪声的随机干扰进行充分抑制。

2. **含控制变量的滤波问题**　在讨论状态调节器问题需要的卡尔曼滤波器应当包含控制变量的作用。设控制变量 $u(t)$ 是确定性的，这时系统方程应当是

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + v(t) \end{cases} \tag{4.6}$$

估计方程应为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)[y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) = C(t)\hat{x}(t) \end{cases} \tag{4.7}$$

重复前面关于卡尔曼滤波问题的讨论，不难求得相应的增益方程和协方差方程为

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t) \tag{4.8}$$

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + Q(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) \tag{4.9}$$

3. **随机系统的最优状态调节器**　随机系统的最优状态调节器就是把系统的随机输出 $y(t)$ 通过卡尔曼滤波器估计出系统的状态，而后又通过反馈增益 $K_m(t)$ 变成最优控制变量 $u(t)$ 去控制待控系统。这样就构成了如图 4-3 的线性随机的最优状态调节器。

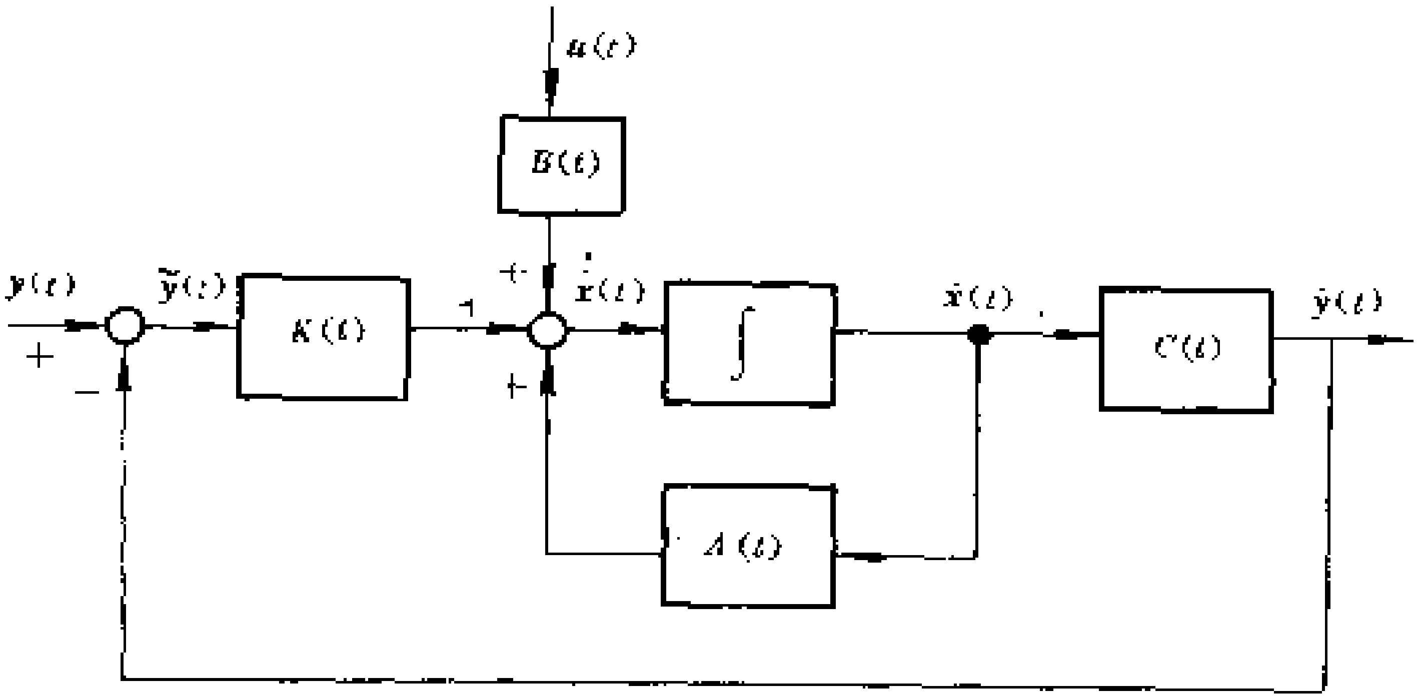


图 4-2　含控制变量的卡尔曼滤波器

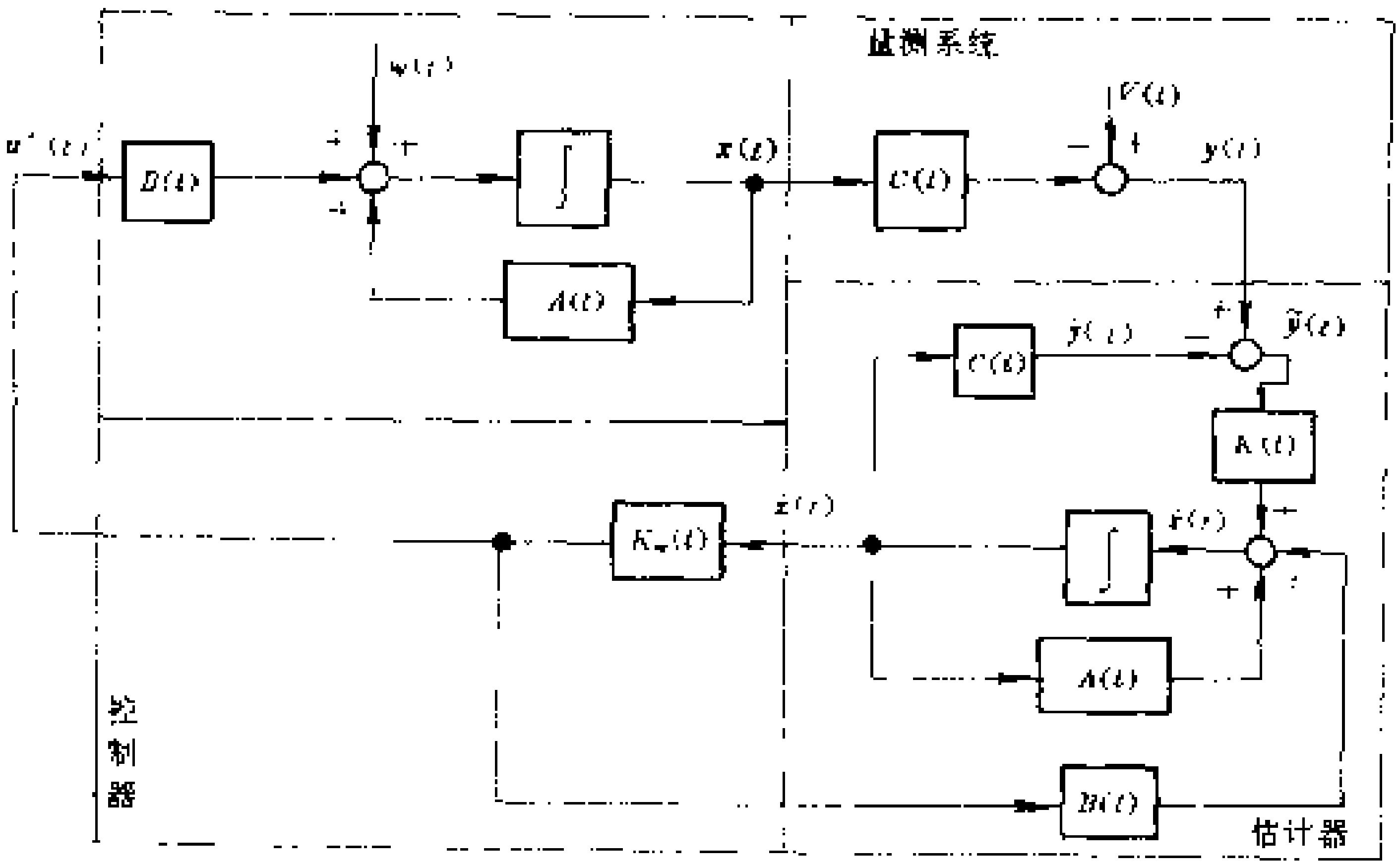


图 4-3　线性随机控制方块图

§5　自适应控制概要

自适应控制的研究对象是具有不确定性的系统，这里所谓"不

确定性”是指描述被控对象及其环境的数学模型不是完全确定的，其中包含一些未知的随机因素。

任何一个实际系统都具有不同程度的不确定性，这些不确定性有时表现在系统内部，有时表现在系统外部。从系统内部来讲，描述被控对象动态过程的数学模型的结构和参数设计者事先并不一定能确切知道。作为外部环境对系统的影响，可以等效地用许多扰动来表示。这些扰动通常是不可测的。它们可能是确定性的，也可能是随机性的。此外，还有一些量测的噪声从不同的测量回路进入系统。这些扰动和噪声的统计特性常常是未知的。面对这些客观存在的各式各样的不确定性，如何确定适当的控制作用，使得某一指定的性能指标达到并保持最优或近似最优，这就是自适应控制所要研究解决的问题。

与常规反馈控制和最优控制一样，自适应控制也是基于一定数学模型和一定的性能指标综合出来的。所不同的是：自适应控制所依据的数学模型由于先验知识较小，需要在系统的运行过程中去提取有关模型的信息，使模型逐渐完善，具体地说，可以根据对象的输入输出数据，不断地辨识模型的结构和参数，这个过程称为系统的**在线辨识**。随着生产过程的不断进行，通过在线辨识，模型会变得愈来愈准确，愈来愈接近于实际。既然模型在不断地改进，显然，基于这种模型综合出来的控制作用也将随之不断改进，在这个意义下，控制系统具有一定的适应能力。譬如，由于对象特性的初始信息比较缺乏，系统在开始投入运行时性能可能不理想，但是只要经过一段运行，通过在线辨识和控制以后，控制系统可以逐渐适应，最终将自身调整到一个满意的工作状态，并使系统的性能指标渐近地趋于最优。再比如某些被控对象，其特性可能在运行过程中要发生较大的变化，但是通过在线辨识的控制，系统也能逐渐适应。由此可见，通过辨识（包括对系统的结构、参数、性能指标等的辨识）所获得的自适应能力是自适应控制系统的主要特点。

当然常规反馈控制系统，对于系统内部特性的变化和外部扰动的影响都具有一定的抑制能力，但是常规反馈控制系统不具备上述“自适应”能力。因此，当系统内部特性或外部扰动的变化幅度很大时，系统的性能指标不仅不可能保持最优，而且常常要大幅度下降，甚至会引起系统的不稳定。

由此可见，对于那些对象特性或扰动特性变化范围很大，同时又要求经常保持高性能指标的一类控制系统采用自适应控制是很有效的。

最后应当指出，自适应控制系统比常规反馈控制系统要复杂得多，因此成本也高得多，而且常常还需要借助于计算机才能够实现。自适应控制方案只是在常规反馈控制达不到期望的性能指标时才考虑采用的。

一、两类重要的自适应控制系统

自从50年代末由美国麻省理工学院提出第一个自适应控制系统以来，先后出现过许多形式完全不同的自适应控制系统。但是，发展到现阶段，无论从理论研究和实际应用的角度来看，比较成熟的自适应控制系统有以下两大类。

1. **参考模型自适应控制** 参考模型自适应控制系统由以下几部分组成，即：参考模型、被控对象、常规反馈控制器和自适应控制回路（自适应规则），系统的结构图如图5-1所示。

从图5-1可以看出，该类自适应控制系统实际是在原来的反馈控制系统的基础上再附加一个参考模型和一个控制器参数的自动调节回路。其中参考模型的输出响应$y_d(t)$直接表示系统希望的动态响应，所以参考模型相当于输出响应的一个样板。这种用模型输出来直接表达对系统的性能要求，往往是很直观很方便的。

控制器参数的自适应调整过程是这样的：当参考输入$r(t)$同时加到系统和模型的入口时，由于对象的初始参数不确定（事先未知），控制器的初始参数不可能整定得很好。因此一开始系统的输

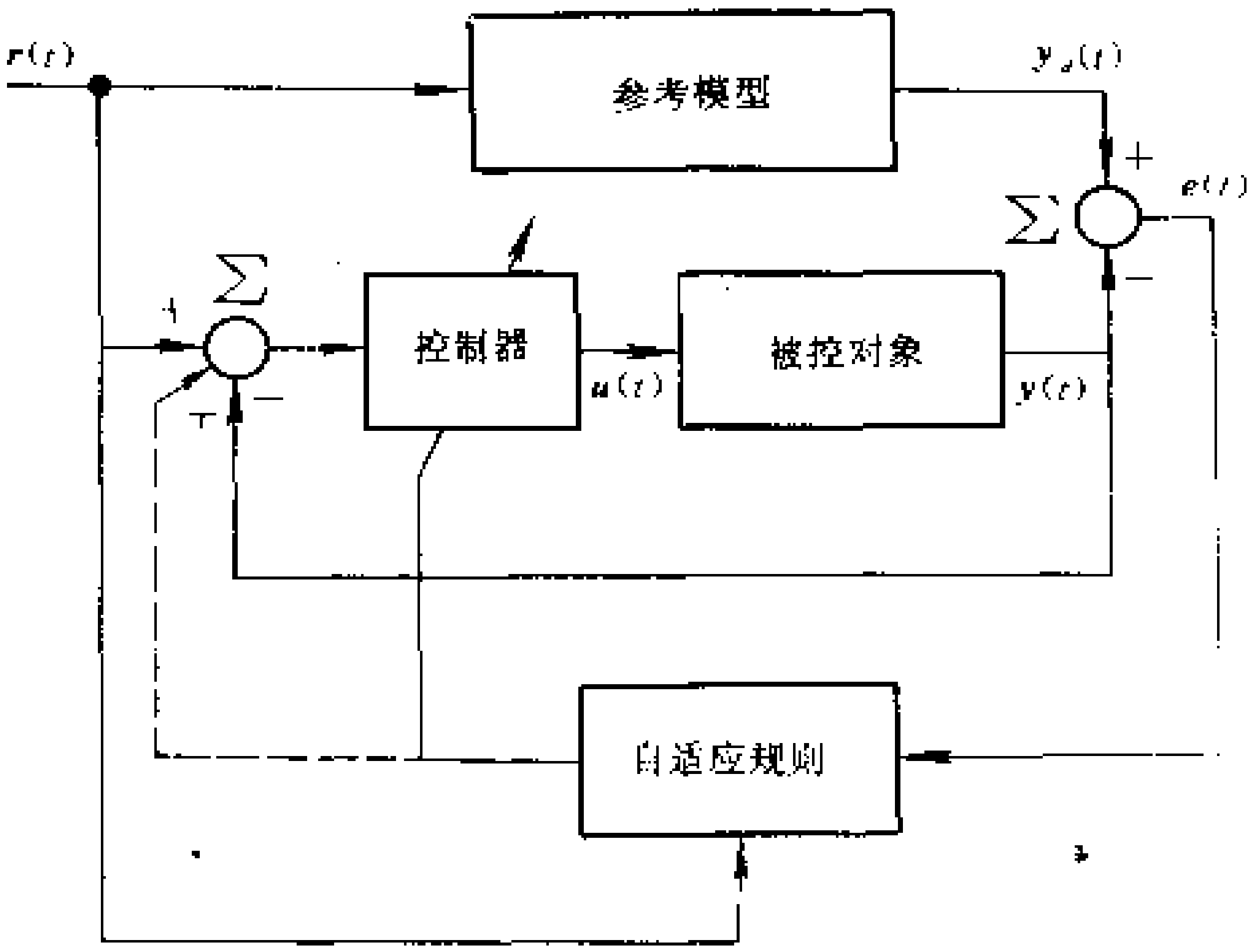


图 5-1 参考模型自适应控制系统的结构图

出响应 $y(t)$ 与模型的输出响应 $y_d(t)$ 是不会完全一致的，结果产生偏差信号 $e(t)$。当信号 $e(t)$ 进入自适应调整回路后，经过由自适应规则所决定的运算，产生适当的调整作用，直接改变控制器的参数。如果直接改变控制器的参数不方便，也可产生等效的附加控制作用，如图 5-1 中虚线所示。从而使系统的输出 $y(t)$ 逐步与模型输出 $y_d(t)$ 接近，直到 $y(t)=y_d(t)$。当偏差信号 $e(t)=0$ 后，自适应调整过程就自动停止，控制器参数也就自动整定完毕。

由此可见，尽管系统初始参数未知，但通过对参考模型输出 $y_d(t)$ 和对象输出 $y(t)$ 的量测和比较以及相应的控制器参数的自适应调整，系统初始参数不确定对系统运行性能的影响将逐步被减小。经过一段运行，系统对参考输入的动态响应最终将自动地调整到与希望的动态响应相一致。这就是参考模型自适应控制的基本工作原理。当对象特性在运行中发生变化时，控制器参数的自适应调整过程与上述过程完全一样。

设计这类自适应控制系统的核心问题是如何确定自适应规

则。关于自适应规则的确定目前存在两类不同的原则。其中一种称为参数最优化，即利用最优化技术搜索到一组控制器的参数，使得某个预定的性能指标，例如

$$J = \int e^2(t)\mathrm{d}t$$

达到最小。自适应规则的另一种设计原则是基于稳定性理论。其基本思想是保证控制器参数的自适应调整过程是稳定的，然后再使这个调整过程尽可能收敛得快一些，由于自适应控制系统一般都是本质非线性的，因此，这种自适应规则的设计自然要采用适用于非线性系统的稳定理论，李亚普诺夫稳定理论是设计自适应控制系统的有效工具。保证系统稳定是系统设计最基本的要求，所以基于稳定性理论的自适应原则，已引起了广泛的注意。

2. **具有被控对象数学模型在线辨识的自适应控制**　这类自适应控制的一个主要特点是具有被控对象数学模型在线辨识环节，根据系统的运行数据，首先对被控对象进行在线辨识，然后再根据辨识得来的模型参数和事先指定的性能指标，在线地确定控制作用。通常这类系统在设计辨识算法和控制算法时，考虑了随机扰动和量测噪声的影响，所以应该属于在线的随机自适应控制系统这一类。这类系统的结构可以用图 5-2 来表示。图中 $\boldsymbol{r}(t)$ 为参考输入，$\boldsymbol{w}(t)$、$\boldsymbol{u}(t)$ 分别为随机扰动和量测噪声，$\theta(t)$，$\boldsymbol{x}(t)$ 分别表示对象的参数估计和状态估计。$\boldsymbol{y}(t)$ 为对象的观测输出，$\boldsymbol{u}(t)$ 为控制输入。

自适应控制系统由被控对象、辨识器和控制器等三部分组成。辨识器根据一定的估计算法，在线地计算被控对象未知参数 θ 和未知状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 的估值 $\theta(t)$，$\boldsymbol{x}(t)$。控制器再利用估值 $\theta(t)$，$\boldsymbol{x}(t)$ 以及事先指定的性能指标，确定最优控制作用 $\boldsymbol{u}(t)$。这样，经过不断的辨识和控制，系统的性能指标将渐近地趋于最优。这是由于在这类自适应控制系统中，被控对象的初始不确定性可以通过对对象

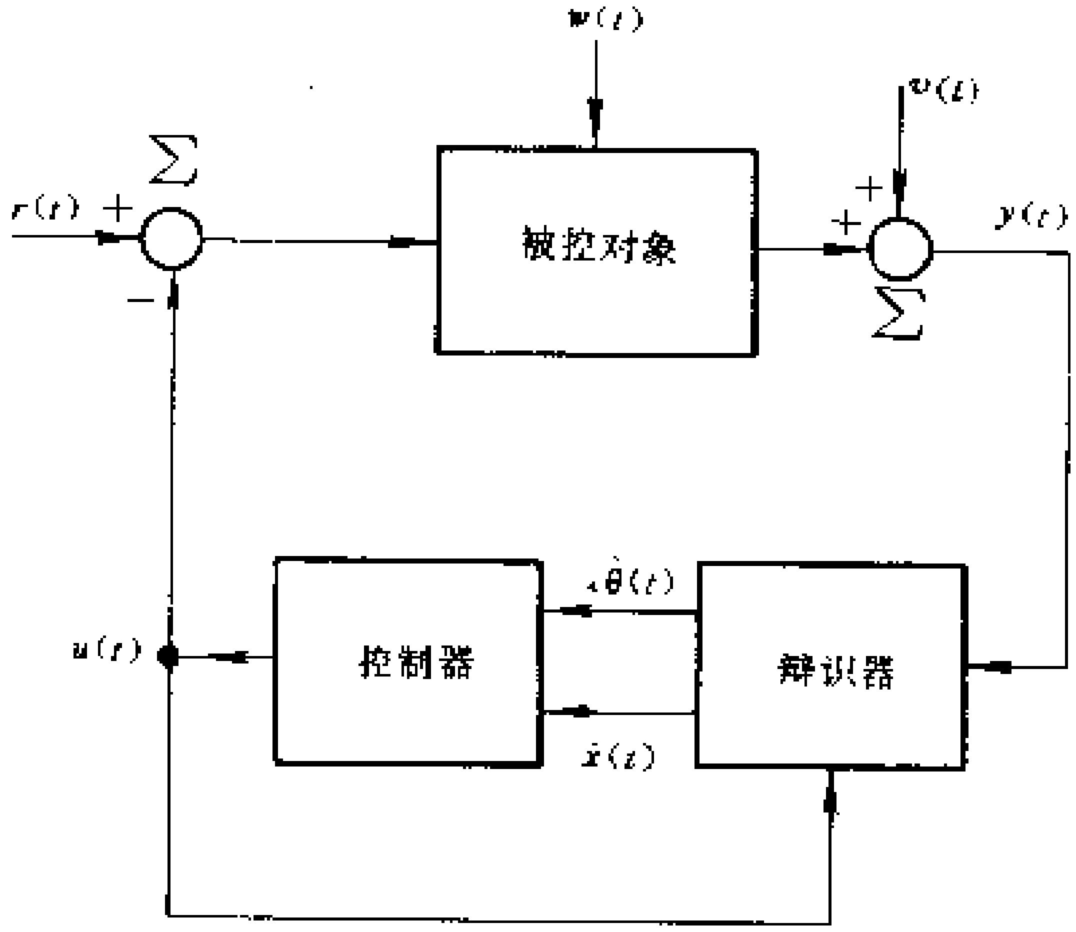


图 5-2　具有在线性辨识的自适应控制系统

参数和状态的在线估计而逐步得到减小，如果对象的参数估计 $\theta(t)$ 和状态估计 $x(t)$ 都是收敛的，而且最后都渐近地收敛到它们各自的真值，那么，最后的自适应控制也将收敛到其最优控制（对象参数已知时的最优控制）。

图 5-2 中的辨识器和控制器实质都是一些递推关系，在工程上要实时地完成所需的递推运算必须采用数字计算机。因此，这类随机自适应控制系统实际上是一类计算机控制系统。自适应控制的理论基础，是估计理论和随机最优控制理论。估计理论中最成功部分是前面介绍的卡尔曼滤波理论。它不仅可以应用于状态估计，也可应用于系统参数的估计。随机最优控制理论和自适应控制有着十分密切的联系。自适应控制的基本部分就是随机系统的自适应控制。

二、自适应控制的应用

自从 50 年代末，由于飞行控制的需要，美国麻省理工学院的怀特克（Whitaker）首先提出了参考模型自适应控制方法，并且企

图用它来解决飞行器的自动驾驶仪问题。限于当时计算机技术和控制理论的发展水平，这些新的控制思想，没有得到应有的普及和推广。尔后，经过二十余年的努力，自适应控制理论和系统的设计方法都有了一定的进展，特别是由于近十余年来计算机技术的飞速发展，微型计算机和微处理机的广泛普及，自适应控制的应用这个课题又重新引起控制工程师们很大的兴趣，70 年代以来，自适应控制不仅在工程应用方面取得了较大的进步，出现了一批成功应用的实例，在非工程领域，如：社会、经济、管理、生物、医学等方面也进行了一些新的探索。

如前所述，飞行器的控制是较早应用自适应控制技术的领域。这是由于飞机的动态特性决定于许多环境参数和结构参数，例如，动态气压、高度、质量、机翼角、阻尼板位置等等参数。在不同的环境下，这些参数可能在相当大的范围内变化，因此，要想在不同的飞行条件下都能获得高性能指标往往是很困难的。传统的解决办法是根据不同的环境条件，按事先安排好的程序，切换控制器的增益以适应不同的环境，为了确定当时的环境条件，需要量测所有影响飞机动态特性的参数，这种办法既不经济，也不现实，实践中只能测量几个主要参数，例如只量测动态气压和高度，因此控制性能不可能很理想。对于飞机这种工作环境复杂、参数变化幅度大的被控对象，采用自适应控制方案当然是十分合理的。因为采用自适应控制以后，不仅常规控制系统中使用的复杂的传感器可以大大节省，而且在不同飞行条件下的控制性能也得到改善。

大型油轮的自动驾驶仪是成功应用随机自适应控制的另一个例子。用它取代了原有的 PID 调节器。实践证明，在变化的复杂随机环境下，例如在海浪、潮流、阵风等的扰动下，以及在不同的气候条件、不同的负荷、不同的航速下，油轮都能适应，并且能够经济地和稳定可靠地工作。

在工业过程控制方面，由于原材料的成分不稳定（其成分是随

机波动的)，或者由于改换产品品种，或者由于设备磨损，这些因素都要使生产的工艺参数发生变化，从而使产品质量不稳定，常规的PID调节器不能很好地适应工艺参数的变化，需要经常进行调整，当采用具有自适应功能的自校正调节器后，由于调节器参数可以随环境和特性的变化而自动整定，所以对于各种不同的运行条件，调节器都能很好地工作，并且使被控过程输出对其设定值的方差达到最小。这样产品的质量就比较稳定，同时也能节省原材料的消耗。另外，由于自校正调节器的算法简单，通常用微型计算机就可以实现，因此，最近几年在工业过程控制的许多领域，例如：造纸机的基重控制，湿度控制；水泥的配料控制；蒸煮器和热交换器的温度控制等等方面，应用自校正调节器都取得了一定的成功。

在电力拖动领域，近年来成功地应用了参考模型自适应控制技术，由可控硅变流器供电的直流调速和交流调速系统，在采用了自适应的电流调节器和速度调节器后，可以保证当系统参数，例如：惯量、时间常数、放大倍数等等在大范围内变化，甚至当系统结构也发生变化时；直流调速系统中当主回路的电流由连续变到断续时；整流器—电动机系统的开环传递函数由二阶变为一阶，而且增益和时间常数的变化幅度可能达到数十倍时，即使对象的结构和参数发生如此巨大的变化，但通过自适应，调速系统的动态响应仍旧可以保持与希望的响应(参考模型的输出)相接近，从而为设计高性能的调速系统提供了一条重要途径。在高精度的随动系统中，例如卫星跟踪望远镜，由于采用了参考模型自适应控制技术，自动补偿了在低速和超低速运行时，系统惯量的变化，增益的变化，以及摩擦负载的非线性特性的变化，从而大幅度地提高了系统的稳态和动态跟踪精度。

以上介绍的是近几年来自适应控制在工程应用方面的几个实例。由此已能充分肯定自适应控制的必要性。利用这种控制技术的确能够解决一些常规反馈控制所不能解决的复杂的控制课题。

从另一方面看，微型计算机和微处理机的价格日益下降，这也为自适应控制技术的具体实现提供了比较有利的物质基础。因此，可以预料，自适应控制技术的应用在今后还会有更大的发展。

在非工程应用方面，如何应用自适应控制方法来研究具有不确定性的高维数的大系统，这是一个值得注意的新动向。另外，应用对偶性原理研究随机资源分配问题、研究宏观经济系统的随机最优化问题，近年来也引起了人们的注意。

自适应控制系统的进一步的发展将走向所谓“自学习”系统和“智能控制”系统。这类系统除具有前述一般的自适应功能外，还应当拥有：大型记忆、模式识别以及各式各样带有智能性的高级决策功能。这类系统能够记住系统过去的经验和教训，识别曾经发生过的情况，并且能够基于过去的经验来逐步改进其自适应动作。这类系统所采用的方法除解析方法外，更重要的是模拟人类行为的方法。所以研究这类系统，除需要控制理论的知识外，还需要大量其他方面的专业知识，这将大大超出本书讨论范围。另外，无论是理论研究还是实际应用，这类系统目前都还处在探索阶段。

习　　题

1. 如图 6-1，随机信号 $x(t)$ 通过传递函数为 $1/(s+1)$ 的滤波器变为信号 $y(t)$。设自相关函数

$$\varphi_{xx} = e^{-|\tau|/2}$$

试求出 $\varphi_{xx}(s)$，$\varphi_{xy}(s)$ 和 $\varphi_{yy}(s)$。

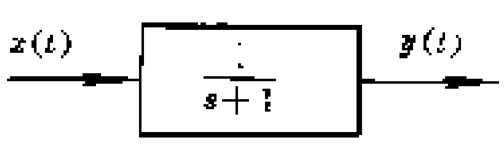


图 6-1

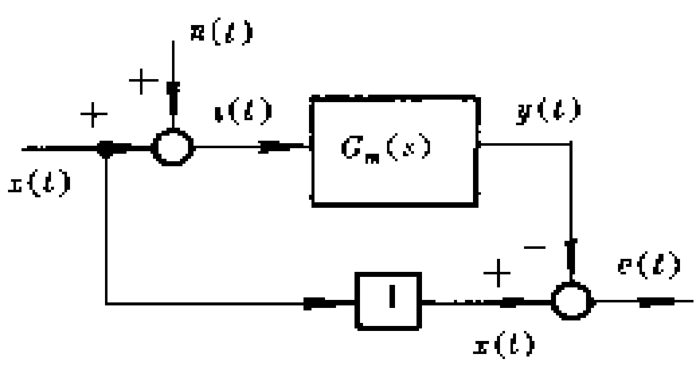


图 6-2

2. 如图 6-2，试求出使 $e^2(t)=\min.$ 的最优滤波器传递函数 $G_m(s)$。这里 $n(t)$ 与 $x(t)$ 无关且为白噪声。它们的频谱密度分别为

$$\varphi_{xx}(j\omega)=\frac{4}{\omega^2+4};\quad \varphi_{nn}(j\omega)=1$$

3. 已知一个各态经历的平稳的物理系统，其状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}w(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+v(t)$$

式中 $w(t)$、$v(t)$ 分别为系统的模型噪声和量测噪声，且有下列性质：

$$\boldsymbol{E}\{w(t)\}=0;\boldsymbol{E}\{w(t+\tau)w(t)\}=\boldsymbol{Q}\delta(\tau)$$

$$\boldsymbol{E}\{v(t)\}=0;\boldsymbol{E}\{v(t+\tau)v(t)\}=\boldsymbol{R}\delta(\tau)$$

求上述系统的卡尔曼滤波方程。（提示：对于平稳随机过程，$\dot{P}(t)\equiv 0$）

附　　录

A—1 拉普拉斯变换对照表

	$f(t)$	$F(s)$
1	单位脉冲 $\delta(t)$	1
2	单位阶跃 $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	$t^n \quad (n=1,2,3,\cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n=1,2,3,\cdots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab}[1+\frac{1}{a-b}(be^{-at}-ae^{-bt})]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

	$f(t)$	$F(s)$
14	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
15	$\dfrac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$	$\dfrac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t$	$\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
17	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\varphi)$ $\varphi=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\dfrac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
18	$1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi)$ $\varphi=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\dfrac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2 z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\dfrac{1}{s}$	$1(t)$	$\dfrac{z}{z-1}$
4	$\dfrac{1}{s^2}$	t	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\dfrac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\dfrac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\dfrac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\dfrac{2}{s^3}$	t^2	$\dfrac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\dfrac{z}{z+a}$

A−2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\dfrac{1}{s}$	$1(t)$	$\dfrac{z}{z-1}$
4	$\dfrac{1}{s^2}$	t	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\dfrac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\dfrac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\dfrac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\dfrac{2}{s^3}$	t^2	$\dfrac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\dfrac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\dfrac{1}{s}$	$1(t)$	$\dfrac{z}{z-1}$
4	$\dfrac{1}{s^2}$	t	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\dfrac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\dfrac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\dfrac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\dfrac{2}{s^3}$	t^2	$\dfrac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\dfrac{z}{z+a}$

A−2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2 z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2 z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$X(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$ z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2 z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A−2　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

$A-2$　z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T-1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A-2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

A－2 z 变换表

	$X(s)$	$x(t)$或$x(k)$	$x(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
11	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{z-a}$
14		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$